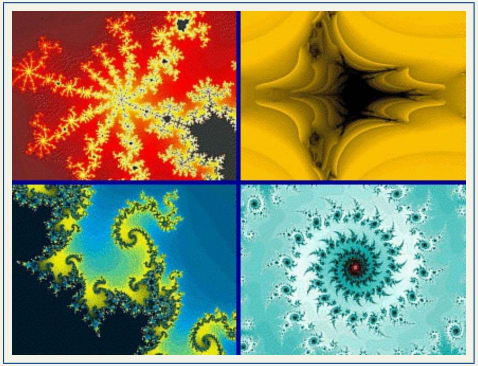
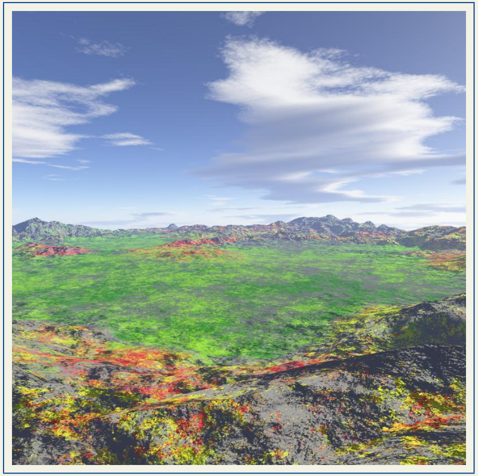




MATEMATICA E VERITÀ

Dall'univocità all'analogia

ALBERTO STRUMIA

www.ciram.unibo.it/∼strumia/

Università di Bari

Facoltà Teologica dell'Emilia-Romagna

Kurt Gödel (1906 – 1978)

Ipotesi e Verità nella matematica

e quindi nella logica

e quindi nella filosofia

e quindi nella conoscenza

e quindi nella vita

«L'indagine sui fondamenti della matematica
negli ultimi decenni ha fornito alcuni risultati che sono
a mio giudizio interessanti non solo di per sé,
ma anche in considerazione delle conseguenze che hanno
sui tradizionali problemi filosofici che concernono la natura
della matematica».

«Nella sua forma più semplice incontriamo questo fatto
quando si applica il metodo assiomatico non a sistemi ipotetico-deduttivi
come la geometria (dove i matematici possono affermare soltanto
la verità condizionale dei teoremi),

ma alla matematica in senso stretto [*mathematics proper*],

cioè a quel nucleo di proposizioni matematiche che
sono valide in senso assoluto, senza alcuna ipotesi ulteriore.

Proposizioni cosiffatte devono esistere, perché altrimenti
non esisterebbero neppure i teoremi ipotetici».

(Kurt Gödel, "Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche" (1951), in Gödel *Opere,* vol. 3, pp. 268-286.)

Oltre il relativismo

«Naturalmente il compito di assiomatizzare la matematica in senso stretto differisce dalla concezione ordinaria della assiomatica

in quanto gli assiomi non sono arbitrari,
ma devono essere proposizioni matematiche corrette,

nonché evidenti senza dimostrazione.

Non c'è via di fuga dall'obbligo di assumere certi assiomi o certe regole di inferenza come evidenti senza dimostrazione» (Gödel)

Evidenti, nel senso di irrinunciabili

in quanto, come i principi primi della logica, si tratta di proposizioni che vengono affermate nel momento stesso in cui si cerca di negarle.

Per cui negarle conduce a contraddizioni.

«Ogni scienza affronta il problema dei

principi comuni delle cose;

ed è necessario che lo faccia, perché
la verità dei principi comuni emerge con chiarezza
dalla conoscenza dei termini comuni,
come ente e non ente, tutto e parti, ecc.»

A partire da Cantor la matematica parla di classi e insiemi
e di parti esterne, interne a un insieme (topologia).

«La stessa filosofia prima non li dimostra direttamente
in quanto sono indimostrabili».

«Anche se non si possono dimostrare direttamente, tuttavia il filosofo primo
offre una sorta di dimostrazione nel senso che, per poterli contraddire,
coloro che li vogliono rifiutare, devono ammetterne la validità,
pur non accettandoli per evidenza».

(Tommaso d'Aquino, *Commento ai Secondi analitici di Aristotele,* Libro I, lettura 20, n. 5).

Queste frasi entrano in certo modo in risonanza con le parole di colui che oggi è il Papa Benedetto XVI, pronunciate già negli anni in cui era ancora cardinale e che hanno uno sviluppo continuo e progressivo nel suo Magistero pontificio.

«Questo relativismo, che oggi, quale sentimento base della persona "illuminata", si spinge ampiamente fin dentro la teologia,

è il problema più grande della nostra epoca»

(J. Ratzinger, *Fede, Verità, Tolleranza,* Cantagalli, Siena 2005, p. 75).

Occorre mettere a punto una razionalità capace di elaborare una teoria dei fondamenti e una teoria della conoscenza che dia spessore alla verità oggettiva, interrogandosi sul

«se e come la verità possa tornare ad essere "scientifica"» (Ivi, p. 201).

PERCORSO DELLA MATEMATICA

M
A
T
E
M
A
T
I
C
A

dal mondo reale (esperienza) $\longrightarrow$ al mondo mentale (logica, creatività)

esperienza del contare, geometria fisica $\longrightarrow$ metodo deduttivo, assiomatizzazione (Archimede, Euclide, Pitagorici)

PERCORSO DELLA MATEMATICA

M
A
T
E
M
A
T
I
C
A

dal mondo reale (esperienza) $\longrightarrow$ al mondo mentale (logica, creatività)

esperienza del contare,
geometria fisica

$\downarrow$

geometrie non euclidee $\longrightarrow$ distacco dal mondo fisico reale (Lobačevskij, Bolyai, Riemann)

PERCORSO DELLA MATEMATICA

M
A
T
E
M
A
T
I
C
A

dal mondo reale (esperienza) $\longrightarrow$ al mondo mentale (logicismo, creatività) $\Longleftarrow$

esperienza del contare, geometria fisica

$\downarrow$

geometrie non euclidee $\longrightarrow$ convenzionalità degli assiomi (Lobačevskij, Bolyai, Riemann) $\Longleftarrow$

PERCORSO DELLA MATEMATICA

M
A
T
E
M
A
T
I
C
A

dal mondo reale (esperienza) $\longrightarrow$ al mondo mentale (logicismo, creatività)

esperienza del contare, geometria fisica

$\downarrow$

completezza e coerenza dei sitemi assiomatici $\longrightarrow$ programma di Hilbert (Russell, Whitehead)

PERCORSO DELLA MATEMATICA

M
A
T
E
M
A
T
I
C
A

dal mondo reale (esperienza) $\longrightarrow$ al mondo mentale (logicismo, creatività)

$\downarrow$ $\downarrow$

PARADOSSI E CONTRADDIZIONI

parad. di Russell, insieme universale

$\Uparrow$ $\Uparrow$

mondo mentale
(logica, creatività)

esperienza del contare,
geometria fisica

$\downarrow$

~~completezza e coerenza~~
~~dei sistemi assiomatici~~ $\longrightarrow$ Teorema di incompletezza (Gödel, 1931)

$\Uparrow$
$\Uparrow$

PERCORSO DELLA MATEMATICA

M
A
T
E
M
A
T
I
C
A

dal mondo reale (esperienza) $\longrightarrow$ al mondo mentale (logicismo, creatività)

$\downarrow$ $\downarrow$

PARADOSSI E CONTRADDIZIONI ? ? ?

parad. di Russell, insieme universale

$\Uparrow$

mondo mentale (logica, creatività)

$\Uparrow$

esperienza del contare, geometria fisica

$\Uparrow$

$\downarrow$

$\Uparrow$

~~completezza e coerenza dei sistemi assiomatici~~ $\longrightarrow$ Teorema di incompletezza (Gödel, 1931)

PERCORSO DELLA MATEMATICA

M A T E M A T I C A

dal mondo reale (esperienza)	$\longrightarrow$	al mondo mentale (logica, creatività)	– (ANDATA) – univocità
$\downarrow$		$\downarrow$	$\uparrow$
PARADOSSI	E	CONTRADDIZIONI	
parad. di Russell		insieme universale	
$x \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow x \notin x$		$\forall x : x \in \mathcal{U}$	
incompletezza		coerenza	ricorso all'infinito
In SA esistono enunciati formalmente indecidibili (sono veri o falsi?)		La coerenza di SA è formalmente indecidibile	Se p è indecidibile in SA_1 è decidibile in un sistema più ampio SA_2 in cui q è indecidibile e così via all'infinito

– Domanda 1: se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{U}$ non sono insiemi, non esistono o sono qualcos'altro?

– Domanda 2: se SA è indecidibile è inevitabile il ricorso all'infinto (relativismo) o esiste un "primo" che è qualcos'altro?

PERCORSO DELLA MATEMATICA

MATEMATICA

dal mondo reale (esperienza) $\longrightarrow$ al mondo mentale (logica, creatività) – (ANDATA) – univocità

$\downarrow$ $\downarrow$

PARADOSSI E CONTRADDIZIONI

parad. di Russell

$$x \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow x \notin x$$

insieme universale

$$\forall x \,:\, x \in \mathcal{U}$$

incompletezza

In SA esistono enunciati formalmente indecidibili (sono veri o falsi?)

coerenza

La coerenza di SA è formalmente indecidibile

ricorso all'infinito

Se p è indecidibile in SA1 è decidibile in un sistema più ampio SA2 in cui q è indecidibile e così via all'infinito

– lo sono in un altro modo: i tipi (Russell) – classi proprie (Gödel): analogia

– esiste ed è SA in un altro modo: la realtà extramentale: l'esperienza. La Rivelazione.

PERCORSO DELLA MATEMATICA

MATEMATICA

dal mondo reale (esperienza)	$\longrightarrow$	al mondo mentale (logica, creatività)	–	(ANDATA) – univocità
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
PARADOSSI	E	CONTRADDIZIONI	$\rightarrow$	SUPERAMENTO
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
dal mondo mentale (logica, creatività)	$\longrightarrow$	al mondo reale (esperienza)		(RITORNO) – analogia

«I paradossi dell'autoriferimento sono noti da millenni. I teoremi di Gödel ci costringono a vederne il loro lato positivo, mostrandoci che la contraddizione nasce solo se ci si appiattisce ad un unico livello di astrazione»
(G. Sambin, "Incompletezza costruttiva", in G. Lolli, U. Pagallo (curatori), *La complessità di Gödel*, Giappichielli Editore, Torino 2008, p. 125-142)

«A mio giudizio [...] i moderni risultati sull'incompletezza [...] spingono nella direzione di una prospettiva "quasi empirica" della matematica»
(G.J. Chatin, "L'incompletezza è un problema serio?", in Lolli/Pagallo, p. 68)

Due modi di attuarsi delle classi - Verso l'analogia

Classi proprie e improprie o insiemi (Gödel)

Nota Bene

— occorrono due definizioni diverse per distinguere il modo di esistere di una classe (non univocità della nozione di classe)

— che però hanno in comune (analogia) il fatto di essere entrambe collezioni di oggetti (la stessa nozione di appartenenza)

Due modi di attuarsi delle classi - Verso l'analogia

Classi proprie e improprie o insiemi (Gödel)

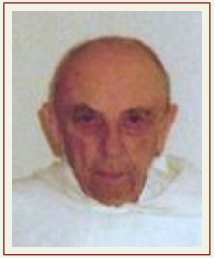
— Def. 1 - ogni classe che appartiene ad una classe è una classe impropria (o insieme)

$$X \in Y \Longrightarrow \mathsf{Ins}(X)$$

— Def. 2 - Ogni classe che NON appartiene a una classe è una classe propria

$$\mathsf{Clp}(X) \stackrel{def}{=\!=} \neg\, \mathsf{Ins}(X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \notin Y.$$

$\mathcal{R}$ e $\mathcal{U}$ sono classi proprie: non possono appartenere a un'altra classe né a se stesse. Così si rimuovono i paradossi e le contraddizioni.



Joseph Bochenski (1902-1995)

ha notato come l'impossibilità, rilevata da Aristotele, di parlare dell' ente come un genere [insieme] universale univocamente definito, senza incorrere in una contraddizione, si ricolleghi proprio a quello che noi oggi conosciamo come

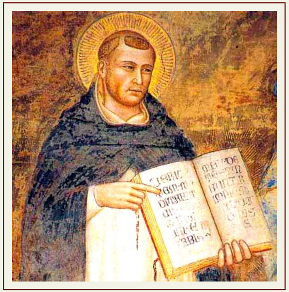
«problema della classe universale.

Egli lo risolse con una brillante intuizione, sebbene, come ora sappiamo con l'aiuto di una dimostrazione imperfetta.

Il passo relativo si trova nel terzo libro della Metafisica:

"Non è possibile che l'essere o l'unità siano un singolo genere di oggetti" (B3, 998b 22-27)»

(J.M. Bochenski, *La logica formale,* Einaudi, Milano 1972, vol. I, p. 77)

Tommaso d'Aquino  commentando Aristotele rileva che:

«In questo [gli antichi filosofi] cadevano in errore, perché utilizzavano la nozione di ente come se corrispondesse ad una unica definizione e ad una sola natura, come fosse la natura di un unico genere; ma questo è impossibile. Infatti ente non è un genere, ma si dice di realtà diverse secondo accezioni diversificate»

(*Commento alla Metafisica di Aristotele,* Libro I, lettura. ix, n. 6))

«Il Filosofo [Aristotele] dimostra, nel III libro della *Metafisica,* che ente non può essere il genere di qualcosa, perché ogni genere comporta delle differenze che sono al di fuori dell'essenza [definizione] del genere stesso; mentre non si dà nessuna differenza al di fuori dell'ente, perché il non ente non può costituire una differenza [in quanto non esiste]»

(*Somma TheoIogica.,* I, q. 3, a. 5).

Si può dire che l'analogia dell'ente è stata intravista

— da Gödel quando scopre
la necessità di distinguere tra classi "proprie" e "improprie",

— da Russell con la teoria dei "tipi"

grazie al fatto che le classi e gli insiemi sono un caso particolare di ente, che si presenta come una collezione di oggetti.

Ma questo loro carattere di enti particolari è sufficiente a far emergere la diversificazione dei loro modi di essere (definiti), per evitare contraddizioni.

L'analogia consente di distinguere modi di esistenza diversificati dell'ente tra i quali:

— quello che chiamiamo ente reale che è nel mondo esterno a noi
e l'ente intenzionale che risiede nella nostra mente e nella nostra logica

— quello che chiamiamo soggetto (sostanza, o ente per se stesso)
e quello che chiamiamo proprietà (accidente o ente di un altro ente).

«Sorge la domanda sul perché l'analogia [che è di origine greca e medievale] sia penetrata nel terreno della logica formale [che è moderna].

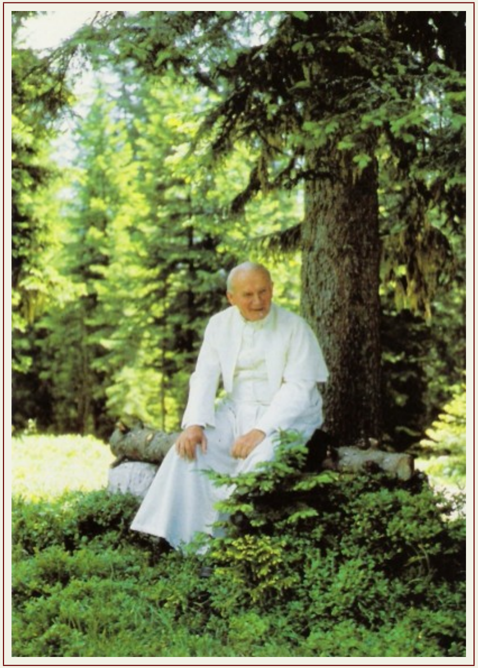
La risposta sembra [consistere nel fatto che ...] la logica formale recente non è altro che una parte dell'ontologia classica»

(J. Bochenski, "Sulla analogia", in G. Basti, C.A. Testi (curatori), *Analogia e autoreferenza,* Marietti 1820, Genova-Milano 2004)

Ai nostri giorni viene così ad aprirsi la strada in vista del passaggio da una teoria degli insiemi a una più generale teoria degli enti, una teoria dei fondamenti logici e ontologici delle scienze, oggi talvolta chiamata ontologia formale.

Questo ci richiama alla mente la sfida lanciata da Giovanni Paolo II:

«Una grande sfida che ci aspetta al termine di questo millennio è quella
di saper compiere il passaggio, tanto necessario quanto urgente,
dal fenomeno al fondamento» (*Fides et ratio,* n. 83).



«Una grande sfida che ci aspetta al termine di questo millennio è quella di saper compiere il passaggio, tanto necessario quanto urgente, dal fenomeno al fondamento»

Fides et ratio, n. 83

— SCHEMA DELL’ ANALOGIA —

Analogia

1.	dei soli nomi (concetti)	(“sano”)
	ma non delle cose	(animale, cibo, colorito)
2.	delle sole cose	(corpo-terrestre, corpo-cleste)
	ma non dei nomi (concetti)	(“corpo”)
3.	sia dei nomi (concetti)	(“cosa”, “ente”, “uno”, “vero”, “buono”)
	che delle cose	(enti reali, cose, oggetti)