

AQ. Analisi qualitativa del moto

L'integrazione delle equazioni differenziali del moto di un sistema meccanico nella maggior parte dei casi non può essere condotta analiticamente a causa delle non linearità delle equazioni. In questi casi si può ricorrere a metodi di integrazione numerica; è comunque molto utile condurre l'*analisi qualitativa del moto*, che consente di trarre molte informazioni senza integrare le equazioni differenziali del moto. Questo metodo di approccio alle equazioni differenziali ordinarie si è sviluppato anche autonomamente dallo studio dei problemi meccanici e costituisce ormai una metodologia propria della teoria delle equazioni differenziali ordinarie. In questo capitolo ne sviluppiamo i concetti più elementari, che applicheremo allo studio del moto dei sistemi meccanici a un grado di libertà.

Sistemi non autonomi e sistemi autonomi

Come si è già visto in precedenza, quando si lavora con un sistema di equazioni differenziali ordinarie di ordine qualunque, è sempre possibile, attraverso successivi abbassamenti del grado delle equazioni, ricondursi ad un sistema le cui equazioni differenziali sono tutte del primo ordine. Di conseguenza assumeremo sempre di partire da sistemi differenziali di equazioni del primo ordine; la struttura più generale per un sistema del genere è data da:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t) \quad (\text{AQ.1})$$

essendo:

$$\mathbf{f} : A \times R \longrightarrow R^n, \quad A \subseteq R^n$$

L'insieme delle variabili $\mathbf{u}(t)$ corrispondenti a una soluzione particolare del sistema (AQ.1), valutato in un istante del tempo, si dice *stato* del sistema nell'istante t e il sistema stesso si dice *sistema dinamico*. Se la funzione \mathbf{f} è lipschitziana rispetto a \mathbf{u} , in un dominio \mathcal{D} , cioè se esiste una costante $C \in \mathbb{R}^+$ tale che:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{u}', t)\| \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathcal{D} \subseteq A$$

assegnate le *condizioni iniziali* $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$, la soluzione del sistema è unica.

— Un sistema del tipo (AQ.1) in cui la funzione \mathbf{f} contiene la dipendenza esplicita dal tempo si dice *sistema non autonomo*.

— Un sistema del tipo (AQ.1) in cui la funzione \mathbf{f} non contiene la dipendenza esplicita dal tempo si dice *sistema autonomo*.

Di conseguenza un *sistema autonomo* si presenta in generale nella forma:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \tag{AQ.2}$$

Osserviamo che se il sistema è *non autonomo* e la funzione \mathbf{f} dipende esplicitamente dal tempo in maniera non lineare, non è possibile traslare l'asse dei tempi e quindi un istante iniziale generico $t_0 \neq 0$ non può essere fatto coincidere con $t = 0$; se invece il sistema è autonomo il problema non sussiste e si può sempre assumere $t_0 = 0$.

La distinzione fra sistema autonomo e non autonomo può sembrare, a prima vista, non rilevante, in quanto un sistema non autonomo si può sempre ricondurre ad un sistema autonomo mediante l'introduzione di una variabile ausiliaria, che rimpiazza il tempo. Per esempio in un sistema in cui è presente una dipendenza esplicita dal tempo periodica si può introdurre $\vartheta = \omega t$, con $\omega > 0$. In tal caso il sistema non autonomo (AQ.1) si riscrive:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \frac{\vartheta}{\omega}) \\ \omega \end{pmatrix}$$

Un sistema di questo tipo ha però ha, però, l'inconveniente di avere soluzioni divergenti nel tempo, in quanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta = \infty$$

anche quando $\mathbf{u}(t)$ si mantiene limitato o addirittura tende asintoticamente a zero. La forma autonoma, quindi, non consente in questo caso sviluppi asintotici per tempi molto grandi e bisogna mantenere il sistema nella forma non autonoma.

Spazio delle fasi

Lo spazio in cui sono definiti gli stati \mathbf{u} di un sistema dinamico prende il nome di *spazio delle fasi*.

Esaminiamo qualche esempio di spazio delle fasi legato a sistemi differenziali che descrivono dei sistemi meccanici.

i) Equazioni del moto di un punto

L'equazione fondamentale della dinamica inerziale del punto:

$$m \ddot{x}_i = F_i(x_k, \dot{x}_k, t), \quad i, k = 1, 2, 3$$

si può riscrivere riducendo le equazioni al primo ordine, nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \frac{1}{m} F_i(x_k, v_k, t) \end{cases}$$

Questo sistema si riconduce alla forma compatta (AQ.1) introducendo i vettori a sei componenti:

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_i \\ \frac{1}{m} F_i(x_k, v_k, t) \end{pmatrix}$$

Lo spazio delle fasi del punto è lo spazio delle posizioni e delle velocità. Si osserva, poi, che il sistema risulta autonomo qualora la forza non dipenda esplicitamente dal tempo e non autonomo in caso contrario.

ii) *Equazioni di Hamilton*

Un altro esempio semplice è offerto dalle equazioni di Hamilton, le quali sono già del primo ordine:

$$\dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}$$

$$\dot{p}_h = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}$$

In questo caso si ha:

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} q_h \\ p_h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \\ - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \end{pmatrix}$$

Lo spazio delle fasi di un sistema canonico è lo spazio delle variabili canoniche, cioè lo spazio delle posizioni e dei momenti. Il sistema risulta autonomo se l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo.

Sistemi a un grado di libertà: piano delle fasi

La descrizione del moto mediante lo spazio delle fasi diventa particolarmente comoda quando il sistema meccanico ha un solo grado di libertà, perchè in questo caso lo spazio delle fasi si riduce a un piano, al quale si dà il nome di *piano delle fasi*, ed è possibile rappresentare su un foglio di carta, o sul monitor di un computer, gli stati del sistema e la loro evoluzione. Il vettore degli stati del sistema ha due sole componenti: $\mathbf{u} \equiv (x, y)$. Qualche esempio.

i) *Punto materiale*

Nel caso di un punto abbiamo semplicemente:

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} \equiv \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{m} F(x, y, t) \end{pmatrix}$$

ii) *Sistema olonomo a vincoli scleronomi*

Nel caso di un sistema olonomo a un grado di libertà, il cui moto viene descritto mediante una sola equazione di Lagrange, per l'unico parametro lagrangiano $q = x$, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q$$

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo, l'energia cinetica è espressa semplicemente da:

$$T = \frac{1}{2} a(x) \dot{x}^2 \quad (\text{AQ.3})$$

Notiamo che la matrice dell'energia cinetica è ora semplicemente una *funzione scalare positiva*. Derivando otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a(x) \dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a(x) \ddot{x} + a'(x) \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2} a'(x) \dot{x}^2$$

dove l'apice denota la derivata rispetto all'argomento x . E quindi l'equazione di Lagrange si specializza nella forma seguente:

$$a(x) \ddot{x} + \frac{1}{2} a'(x) \dot{x}^2 = Q(x, \dot{x}, t) \quad (\text{AQ.4})$$

Dal momento che $a(x)$ è strettamente positivo possiamo ridurre l'equazione in forma normale:

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, t), \quad g(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{a(x)} \left[Q(x, \dot{x}, t) - \frac{1}{2} a'(x) \dot{x}^2 \right] \quad (\text{AQ.5})$$

Essa si presenta allora sotto la stessa forma dell'equazione del moto di un punto nella quale g prende il posto di $\frac{F}{m}$. In questo caso gli stati del sistema sono dati dal vettore $\mathbf{u} \equiv (x, y) \equiv (q, \dot{q})$. Notiamo che se la forza generalizzata di Lagrange Q non dipende esplicitamente dal tempo, il sistema è autonomo.

Rappresentazione grafica

Uno stato del sistema differenziale \mathbf{u} , valutato in un certo istante, viene rappresentato da un punto sul piano delle fasi (*punto di fase*). Assegnando delle condizioni iniziali $\mathbf{u}_0 \equiv (x_0, y_0) \equiv (x_0, \dot{x}_0)$ si individua il punto di partenza del moto. L'integrale particolare $\mathbf{u}(t)$ corrispondente è unico se la funzione \mathbf{f} è lipschitziana, ed è caratterizzato da:

$$\begin{cases} x(t) = x(t, x_0, y_0) \\ y(t) = y(t, x_0, y_0) \end{cases}$$

Geometricamente queste sono le equazioni parametriche di una curva del piano delle fasi alla quale si dà il nome di *traiettoria di fase*. La traiettoria di fase ha un verso di percorrenza dato dall'evoluzione temporale del moto: se la derivata temporale di x , che è data da y , è positiva la funzione x cresce nel tempo; se y è negativa x decresce. Di conseguenza i rami delle traiettorie di fase che si trovano nel semipiano delle $y > 0$ sono percorsi nel senso delle x crescenti, mentre quelli che si trovano nel semipiano delle $y < 0$ sono percorsi nel senso delle x decrescenti.

L'insieme delle traiettorie di fase che descrivono un sistema si dice *diagramma di fase* del sistema.

Quando lo si ritenga conveniente è possibile dare anche una rappresentazione tridimensionale del moto introducendo l'asse dei tempi: si parla in questo caso di *spazio delle fasi ampliato*.

Velocità di fase

Si introduce poi la *velocità di fase* come derivata temporale del vettore che dà lo stato del sistema:

$$\mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{u}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}) \equiv (\dot{x}, \ddot{x}) \quad (\text{AQ.6})$$

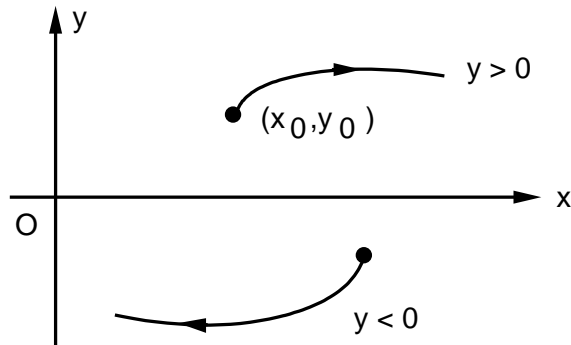


Figura AQ. 1: traiettorie di fase e loro orientamento

Questo vettore non va confuso con la velocità del moto nello spazio delle configurazioni che costituisce solo la prima componente della velocità di fase, mentre la seconda componente è data dall'accelerazione. La velocità di fase è un vettore che si mantiene tangente alle traiettorie di fase durante il moto.

Osserviamo che quando viene dato un sistema differenziale di equazioni del primo ordine, la funzione f descrive il campo delle velocità di fase che caratterizza il sistema.

Punti fissi e punti di equilibrio

Si dicono *punti fissi* quei punti del sistema che hanno velocità di fase nulla: in questi punti la velocità e l'accelerazione sono contemporaneamente nulle, per cui il sistema meccanico si trova in quiete; di qui la denominazione di punti fissi.

- Essendo nulla la velocità i punti fissi appartengono sempre all'asse delle ascisse, in quanto $y = \dot{x} = 0$. Tuttavia non tutti i punti dell'asse delle ascisse sono punti fissi in quanto la condizione di appartenenza a tale asse $y = 0$, da sola, non dice nulla sull'accelerazione.

Se la f è lipschitziana così che valga il teorema di unicità della soluzione

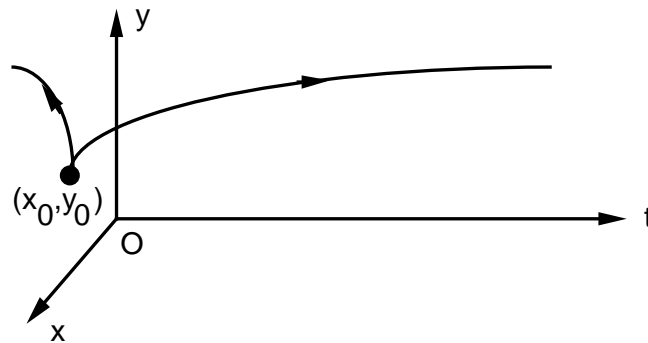


Figura AQ. 2: spazio delle fasi ampliato

del problema di Cauchy, allora la quiete equivale all'equilibrio e i punti fissi sono i punti di equilibrio del sistema e viceversa.

- I punti fissi sono le traiettorie di fase corrispondenti a quel caso particolare di moto che è la quiete.

Sistemi autonomi: equazione delle curve integrali

D'ora in avanti ci occuperemo dei *sistemi autonomi*. Dal punto di vista dei problemi meccanici i sistemi di interesse sono quelli che derivano da un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{AQ.7}$$

nella cui struttura rientra l'equazione del moto di un punto o di un generico sistema olonomo a un grado di libertà, con vincoli e forze indipendenti dal tempo. E quindi sistemi di equazioni del primo ordine, ad essa equivalenti, della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases} \quad (\text{AQ.8})$$

In corrispondenza delle condizioni iniziali (x_0, y_0) , l'integrale particolare:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\text{AQ.9})$$

fornisce le equazioni parametriche della traiettoria di fase, la cui equazione cartesiana:

$$y = y(x)$$

si ottiene eliminando il parametro t dalle (AQ.9).

• E' lecito domandarsi se è indispensabile integrare le equazioni del moto per determinare le traiettorie di fase di un sistema. E' chiaro che l'interesse dell'analisi qualitativa del moto nel piano delle fasi è legato alla possibilità di avere informazioni sul moto, mediante le traiettorie di fase anche quando non si riesce ad integrare il sistema differenziale del moto. Osserviamo che per un *sistema autonomo* è sempre possibile giungere ad un'equazione differenziale per la funzione incognita $y(x)$, senza coinvolgere il tempo, e quindi senza conoscere la legge di evoluzione temporale del moto. Ciò è possibile grazie al fatto che la funzione f nel sistema (AQ.8) non contiene esplicitamente il tempo.

Per giungere a questa equazione differenziale calcoliamo la derivata di $y(x(t))$ rispetto ad t , tenendo conto che y è funzione composta di t attraverso x . Abbiamo:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} y(x(t)) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' \dot{x}$$

Se si escludono i punti del piano delle fasi nei quali si annulla $y = \dot{x}$ possiamo esprimere:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad y = \dot{x} \neq 0$$

Tenendo conto delle informazioni che vengono dal sistema (AQ.8) possiamo scrivere l'equazione:

$$\boxed{y' = \frac{1}{y} f(x, y)} \quad (\text{AQ.10})$$

che prende il nome di *equazione delle curve integrali* e non contiene più il tempo. Le soluzioni di questa equazione, possono essere delle curve a più rami che rappresentano traiettorie di fase distinte, in quanto i punti di un ramo non sono raggiungibili assegnando delle condizioni iniziali, al sistema differenziale del moto, su un altro ramo. Per questo si preferisce allora chiamare *curve integrali*, anzichè traiettorie di fase, le curve rappresentative delle soluzioni di questa equazione.

- Osserviamo che y' , dal punto di vista geometrico, rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva integrale nel punto del piano delle fasi di coordinate x, y . Si possono determinare, allora, le curve nei punti delle quali la tangente alle curve integrali che passano per quei punti ha uno stesso valore C assegnato. Queste curve, la cui equazione è:

$$\frac{1}{y} f(x, y) = C \quad (\text{AQ.11})$$

prendono il nome di *curve isocline* e sono utili per avere informazioni sull'andamento delle curve integrali anche senza integrare la (AQ.10).

Singularità

Analizziamo ora il comportamento delle curve integrali nei punti singolari, in cui $y = \dot{x} = 0$, cioè nei punti dell'asse delle ascisse del piano delle fasi. Notiamo che questi punti che sono singolari dal punto di vista geometrico, per le curve integrali, sono punti estremamente significativi dal punto di vista del problema meccanico. Essi perciò devono essere analizzati e classificati.

i) *punti di equilibrio*: $\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$

Sono i *punti fissi* del sistema, nei quali oltre alla velocità $y = \dot{x}$ si annulla anche l'accelerazione $\dot{y} = \ddot{x}$, cioè si annulla la velocità di fase. Di conseguenza risulta nulla anche la funzione $f(x, 0)$. Nella (AQ.10) la derivata y' presenta un'indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$. Geometricamente la tangente risulta indeterminata.

ii) *Punti di inversione del moto*: $\dot{x} = 0, \ddot{x} \neq 0$

Questi punti si trovano sull'asse delle ascisse del piano delle fasi, ma non sono punti fissi, in quanto la velocità di fase non è nulla, essendo non nulla l'accelerazione $\dot{y} = \ddot{x}$. Perciò dal sistema (AQ.8) abbiamo l'informazione $f(x, 0) \neq 0$. L'equazione delle curve integrali ci dà l'informazione conseguente relativa al limite della derivata:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y' = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} f(x, 0) = \infty$$

Geometricamente questo significa che la tangente alla curva integrale, nel punto singolare, è verticale. La curva attraversa l'asse delle ascisse nel punto singolare e quindi la velocità cambia segno, invertendo il verso del moto. Il punto è detto, perciò *punto d'inversione del moto*.

Notiamo che attraversando l'asse delle ascisse, la $y = \dot{x}$ cambia segno e perciò la $x(t)$ passa da funzione crescente a decrescente rispetto a tempo o

viceversa. Perciò la $x(t)$ raggiunge per $y = 0$ il suo massimo o il suo minimo.

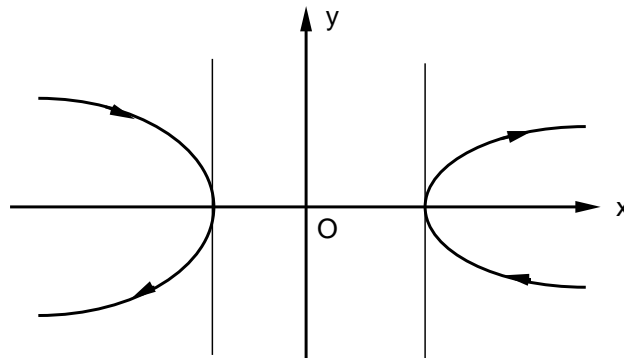


Figura AQ. 3: punti di inversione del moto

Sistemi conservativi: curve di livello dell'energia

Se il sistema, oltre ad essere autonomo è anche *conservativo*, allora le forze si possono esprimere mediante un potenziale $U(x)$, e quindi, come in genere si preferisce fare trattando i sistemi dinamici, mediante l'energia potenziale $V(x) = -U(x)$, funzioni in questo caso del solo parametro x . Esaminiamo prima il caso di un punto e poi il caso di un sistema olonomo.

i) *Punto materiale*

Nel caso di un punto, soggetto a forza conservativa l'equazione delle curve integrali assume la forma seguente:

$$y' = - \frac{1}{m y} V'(x) \tag{AQ.12}$$

Avendo denotato con l'apice la derivata rispetto a x . Possiamo riscriverla nella forma:

$$m y y' = -V'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} m y^2 + V(x) \right] = 0$$

Da cui, integrando:

$$\frac{1}{2} m y^2 + V(x) = \text{costante}$$

Ma $y = \dot{x}$ è la velocità del punto, e quindi l'equazione precedente esprime l'integrale primo dell'energia meccanica. Concludendo:

- *le curve integrali del moto di un punto soggetto a forza conservativa sono le curve di livello dell'energia meccanica, cioè le curve lungo le quali l'energia mantiene valore costante.*

Possiamo riscrivere l'equazione delle curve di livello indicando la costante con il valore dell'energia:

$$\boxed{\frac{1}{2} m y^2 + V(x) = E} \quad (\text{AQ.13})$$

Lo studio dell'andamento delle curve di livello si può condurre esplicitando rispetto ad y (*metodo di Weierstrass*):

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (\text{AQ.14})$$

dalla quale l'andamento delle curve di livello può essere dedotto dall'andamento dell'energia potenziale. La condizione di realtà della radice quadrata:

$$E - V(x) \geq 0$$

fornisce le informazioni relative agli intervalli permessi per le posizioni x del punto. Notiamo che il dominio di realtà della radice può essere non connesso, con la conseguenza che possono esistere, in corrispondenza di un valore assegnato dell'energia, più rami (traiettorie di fase) separati della stessa curva integrale, i cui punti sono raggiungibili solo partendo da condizioni iniziali appartenenti allo stesso ramo.

Il risultato ottenuto è molto potente in quanto ci consente di ottenere informazioni qualitative sull'andamento del moto, nel piano delle fasi, senza integrare le equazioni, ma calcolando solamente l'energia meccanica del sistema. Al variare di E si ottiene l'intera famiglia delle curve integrali del moto del punto.

Come esempio possiamo considerare l'oscillatore armonico semplice, per il quale:

$$V(x) = \frac{1}{2} k^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad \omega^2 = \frac{k^2}{m}$$

Quindi l'integrale primo dell'energia si esprime come:

$$\frac{1}{2} m y^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = E$$

Possiamo scrivere in una forma meglio leggibile dal punto di vista geometrico questo risultato:

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{y^2}{\frac{2E}{m}} = 1$$

Le curve di livello dell'energia sono delle ellissi il cui centro è l'origine del piano delle fasi e i cui assi di simmetria sono gli assi cartesiani del piano delle fasi. L'origine rappresenta un punto fisso del sistema meccanico (punto di equilibrio). che le curve di livello non si intersecano e sono curve chiuse includenti il punto di equilibrio stabile del sistema.

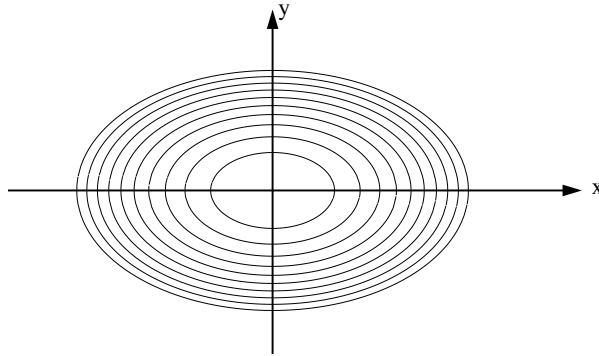


Figura AQ. 4: curve di livello dell'oscillatore armonico semplice

ii) *Sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo*

Affinchè il sistema delle equazioni differenziali sia autonomo, occorre che i vincoli siano indipendenti dal tempo e quindi anche l'energia potenziale deve essere indipendente dal tempo. In questo caso, tenendo conto del risultato generale (AQ.5) e del fatto che:

$$Q(x) = U'(x) = -V'(x)$$

l'equazione delle curve integrali si scrive:

$$y' = -\frac{1}{a(x)y} \left[V'(x) + \frac{1}{2} a'(x) y^2 \right] \quad (\text{AQ.15})$$

Rispetto all'equazione del punto notiamo che qui la funzione $a(x)$ che caratterizza l'energia cinetica prende il posto della massa. Abbiamo allora:

$$a(x) y y' + \frac{1}{2} a'(x) y^2 + V'(x) = 0 \quad \iff \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} a(x) y^2 + V(x) \right] = 0$$

Essendo:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} a(x) y^2 \right] = a(x) y y' + \frac{1}{2} a'(x) y^2$$

Dunque le curve integrali sono caratterizzate dall'equazione:

$$\frac{1}{2} a(x) y^2 + V(x) = \text{costante}$$

che rappresenta l'integrale primo dell'energia del sistema olonomo, essendo:

$$T = \frac{1}{2} a(x) \dot{x}^2, \quad \dot{x} = y$$

Otteniamo allora la generalizzazione al sistema olonomo del risultato ottenuto per il punto.

• *le curve integrali del moto di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, soggetto a ad un sistema di forze conservativo, sono le curve di livello dell'energia meccanica.*

$$\boxed{\frac{1}{2} a(x) y^2 + V(x) = E} \quad (\text{AQ.16})$$

In forma esplicita si ha in questo caso:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{a(x)} [E - V(x)]} \quad (\text{AQ.17})$$

Essendo $a(x) > 0$, le informazioni relative ai punti fissi e ai punti di inversione si ottengono anche in questo caso, mediante lo studio dell'andamento dell'energia potenziale.

• Notiamo che ogni curva di livello è identificata dal valore dell'energia che corrisponde al moto ad essa associato. Ne viene di conseguenza che: *due curve di livello relative a differenti valori dell'energia non hanno punti in comune.*

Infatti, i punti d'intersezione di due curve di livello relative ad energie distinte E_1, E_2 sono dati dalle soluzioni, se esistono, del sistema algebrico:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a(x) y^2 + V(x) = E_1 \\ \frac{1}{2} a(x) y^2 + V(x) = E_2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima otteniamo $E_1 - E_2 = 0$ contrariamente all'ipotesi che le energie siano distinte. Dunque le due curve non si intersecano in alcun punto.

Curve di livello degli integrali primi

Se il sistema autonomo (AQ.8) ammette un qualunque integrale primo indipendente dal tempo $\psi = \psi(x, y)$, che non è necessariamente quello dell'energia, allora, durante il moto, per definizione di integrale primo si deve avere:

$$\psi(x(t), y(t)) = C$$

Quindi, le curve di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

che rappresentano le traiettorie di fase del moto, non sono altro che le curve di livello dell'integrale primo. Di conseguenza abbiamo:

$$\frac{d\psi}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \dot{y} = 0$$

Da cui ricaviamo:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = - \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}$$

Ma questo risultato deve essere compatibile con l'equazione delle curve integrali (AQ.10), per cui abbiamo la condizione affinché una funzione $\psi(x, y)$ sia un integrale primo per un sistema autonomo di equazioni del moto:

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} = \frac{1}{y} f(x, y) \quad (\text{AQ.18})$$

L'integrale primo dell'energia costituisce un caso particolare, vantaggioso in quanto consente di esplicitare facilmente y e di ricondurre lo studio qualitativo del moto allo studio dell'energia potenziale.

• Vale la pena osservare che, per un sistema autonomo, ogni funzione differenziabile che dipende dalle variabili (x, y) mediante l'argomento:

$$\xi = y - y(x)$$

essendo $y = y(x)$ l'equazione cartesiana che definisce le curve integrali, risulta essere un integrale primo del moto. Infatti durante il moto si ha:

$$\frac{d}{dt} \psi(\xi(t)) = \frac{d\psi}{d\xi}(\xi) (\dot{y} - y' \dot{x})$$

Ma durante il moto $\dot{y} - y' \dot{x} = 0$ e dunque:

$$\frac{d}{dt} \psi(\xi(t)) = 0, \quad \psi(\xi(t)) = \text{costante}$$

Per questo identificare un integrale primo del moto equivale ad identificare le curve integrali e viceversa.

Andamento di $V(x)$ e curve di livello dell'energia

Studiamo ora il comportamento delle curve di livello dell'energia in dipendenza del comportamento dell'energia potenziale $V(x)$ del sistema conservativo.

i) $V(x)$ *monotona crescente (decrecente)*

Iniziamo con l'analisi degli *zeri* della funzione $E - V(x)$. Se $V(x)$ è una funzione crescente è possibile determinare, per ogni valore assegnato dell'energia meccanica E , una sola soluzione x_E dell'equazione:

$$V(x) = E \quad \Longrightarrow \quad x_E = V^{-1}(E)$$

grazie alla biunivocità della funzione che può essere invertita in tutto il dominio di monotonia. La soluzione ha molteplicità $M = 1$ in quanto $V'(x_E) \neq 0$ grazie alla monotonia della $V(x)$. Di conseguenza l'accelerazione del moto non è nulla e il punto x_E rappresenta un *punto di inversione del moto*. La condizione di realtà della radice quadrata nella (AQ.17) è soddisfatta a condizione che:

$$x \leq x_E \tag{AQ.19}$$

condizione che identifica l'intervallo delle x permesso durante il moto. Nel punto di inversione la tangente alla curva di livello è verticale; assegnando valori diversi all'energia si ottengono altrettante curve di livello con altrettanti

punti di inversione. Qualora la $V(x)$ fosse decrescente nella (AQ.19) si scambia il segno di \leq con quello di \geq e il grafico diviene simmetrico rispetto ad un asse verticale.

ii) $V(x)$ dotata di un massimo relativo stretto

Quando $V(x)$ è massima in un punto x^* si ha un punto di equilibrio (punto fisso) instabile (potenziale minimo). Indicando con $V^* = V(x^*)$ il valore massimo dell'energia potenziale, distinguiamo tre casi.

a) $E < V^*$

In questo caso la condizione di realtà della radice in (AQ.17) è soddisfatta in due intervalli disgiunti:

$$x \leq x_E^{(1)}, \quad x \geq x_E^{(2)}$$

In quanto la disequazione:

$$E - V(x) \geq 0$$

ammette due sole soluzioni del tipo esaminato nel caso dell'energia potenziale monotona, perchè l'energia potenziale è monotona crescente per $x < x^*$ e monotona decrescente per $x > x^*$ e quindi la retta di equazione $V = E$ ha due intersezioni distinte con la curva dell'energia potenziale. I due punti $x_E^{(1)}, x_E^{(2)}$ sono due punti di inversione del moto e il moto non è permesso nell'intervallo compreso tra essi.

b) $E > V^*$

In questo caso la condizione di realtà della radice in (AQ.17) è sempre soddisfatta e tutto l'asse delle x può essere percorso dal moto, in quanto si ha:

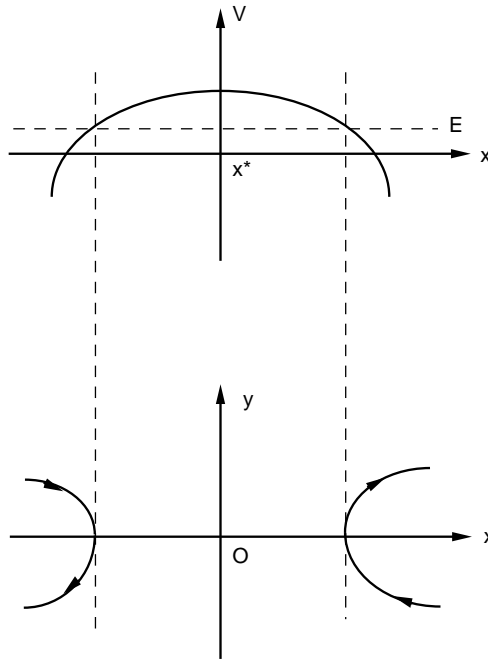


Figura AQ. 5: punti di inversione nell'intorno di un massimo dell'energia potenziale

$$V(x) \leq V^* \quad \implies \quad E - V(x) \geq E - V^* > 0$$

La curva di livello relativa all'energia E possiede due rami, corrispondenti al segno positivo e negativo nella (AQ.17), che non possono connettersi tra loro, perchè non hanno intersezioni con l'asse delle ascisse in quanto non può mai verificarsi la condizione di intersezione $E - V(x) = 0$. Mentre si ha un'intersezione, con la retta di equazione $x = x^*$ che per comodità possiamo identificare come asse y , per ogni ramo, corrispondente alle ordinate:

$$y_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2}{a(x^*)} (E - V^*)}$$

La tangente nei punti di intersezione ha coefficiente angolare, dato dall'equazione delle curve integrali, che, vale:

$$y'_{\pm} = -\frac{a'(x^*) y_{\pm}}{2 a(x^*)}$$

in quanto, in un punto di massimo dell'energia potenziale $V'(x^*) = 0$.

Notiamo che nel caso in cui $a'(x^*) = 0$, come avviene per esempio per un punto, la y assume minimo modulo nel punto di intersezione, in quanto, altrove $E - V(x) > E - V(x^*)$ e la y'_{\pm} si annulla; quindi la tangente risulta orizzontale.

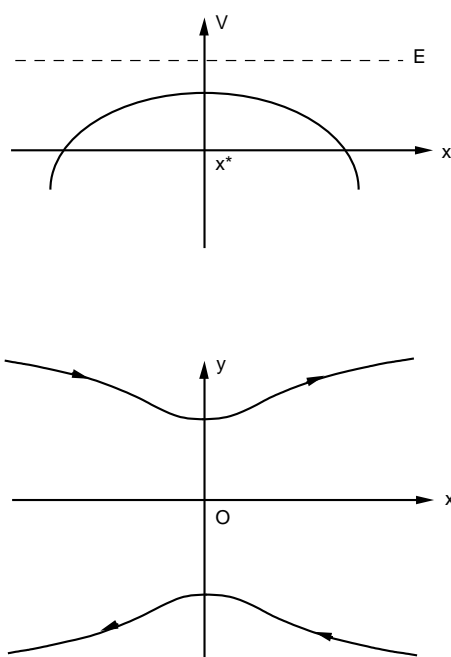


Figura AQ. 6: Curve di livello con energia superiore al massimo dell'energia potenziale

c) $E = V^*$ *curve separatrici*

Siamo nel caso limite tra i due precedenti. In questo caso, come nel precedente, la condizione di realtà della radice in (AQ.17) è sempre soddisfatta e tutto l'asse delle x può essere percorso dal moto, in quanto si ha:

$$V(x) \leq V^* \quad \Longrightarrow \quad E - V(x) = V^* - V(x) \geq 0$$

La radice x^* dell'equazione:

$$V(x) = E$$

ha molteplicità $M = 2$, come si verifica tenendo conto che la funzione da annullare è $f(x) = V(x) - E$, la cui derivata prima in x^* è nulla: $f'(x^*) = V'(x^*) = 0$. La retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale hanno un contatto del primo ordine in x^* , e sono quindi tangenti.

La curva di livello corrispondente ha equazione:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{a(x)} [V^* - V(x)]} \quad (\text{AQ.20})$$

Come si vede facilmente i due rami corrispondenti ai due segni, hanno in comune solo un punto di fase, di coordinate $(x^*, 0)$. Si noti che questo è un punto fisso, essendo un punto di equilibrio, e quando viene assegnato come condizione iniziale esso coincide con la traiettoria di fase (quiete).

I due rami della curva di livello così caratterizzata prendono il nome di *curve separatrici*. Le tangenti alla curva di livello nel punto fisso sono indeterminate, come si vede esaminando la (AQ.15), a causa del fatto che i due rami delle separatrici, incontrandosi nel punto fisso, danno luogo a due tangenti nello stesso punto. L'indeterminazione $\frac{0}{0}$ si elimina con il metodo di

De L'Hospital, considerando il rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore delle (AQ.15):

$$y'_{\pm} = \lim_{x \rightarrow x^*} \left\{ - \frac{V'(x) + \frac{1}{2} a'(x) y^2}{a(x) y} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x^*} \left\{ - \frac{V''(x) + \frac{1}{2} a''(x) y^2 + a'(x) y y'}{a'(x) y + a(x) y'} \right\} = - \frac{V''(x^*)}{a(x^*) y'_{\pm}}$$

da cui si ricava:

$$y'_{\pm} = \pm \sqrt{- \frac{V''(x^*)}{a(x^*)}} \quad (\text{AQ.21})$$

Come si vede esistono due tangenti alle separatrici nel punto di fase $(x^*, 0)$.

Conglobando i risultati relativi a tutti gli intervalli dell'energia meccanica otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di massimo dell'energia potenziale (punto di equilibrio instabile).

Possiamo verificare analiticamente che i punti di *equilibrio instabile* rappresentano dei *punti di sella* per l'energia meccanica del sistema. Infatti, considerata la funzione:

$$E(x, y) = \frac{1}{2} a(x) y^2 + V(x)$$

in corrispondenza di un massimo dell'energia potenziale in x^* , e imponendo $y = 0$ abbiamo:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} a'(x) y^2 + V'(x), \quad \frac{\partial E}{\partial y}(x, y) = a(x) y$$

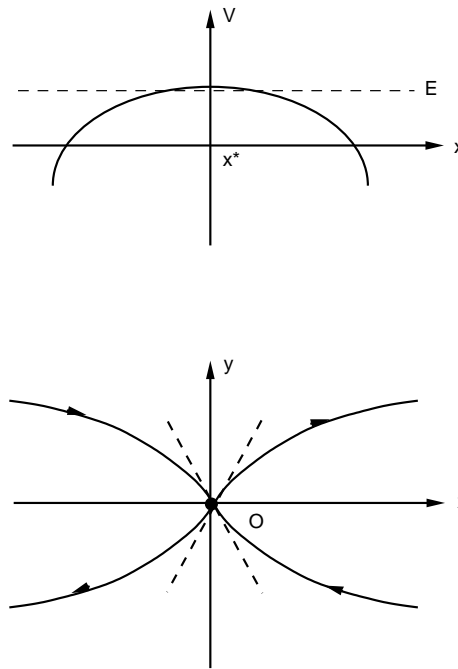


Figura AQ. 7: Curve separatrici

E questo comporta:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x^*, 0) = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y}(x^*, 0) = 0$$

condizione necessaria per avere un estremante. Esaminando le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{2} a''(x) y^2 + V''(x), \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(x, y) = a'(x) y$$

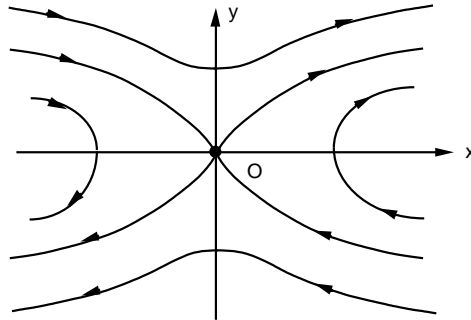


Figura AQ. 8: punto di sella instabile

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x, y) = a(x)$$

Da cui:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x^*, 0) = V''(x^*) < 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(x^*, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x^*, 0) = a(x^*) > 0$$

essendo in un punto di massimo per l'energia potenziale, ed essendo sempre positiva la $a(x)$. Allora la matrice hessiana di E non è definita di segno e siamo in un punto di sella:

$$\begin{pmatrix} V''(x^*) & 0 \\ 0 & a(x^*) \end{pmatrix}$$

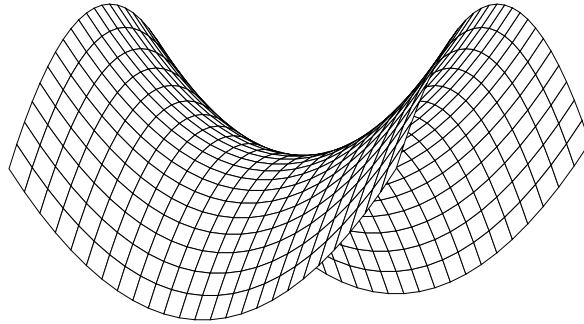


Figura AQ. 9: sella dell'energia meccanica in un punto di equilibrio instabile

iii) $V(x)$ dotata di un minimo relativo stretto

Quando $V(x)$ è minima in un punto x^* si ha un punto di equilibrio (punto fisso) stabile (potenziale massimo). Indicando con $V^* = V(x^*)$ il valore minimo dell'energia potenziale, distinguiamo anche qui tre casi.

a) $E < V^*$

In questo caso la condizione di realtà della radice in (AQ.17) non è mai soddisfatta, in quanto:

$$V(x) \geq V^* \implies -V(x) \leq -V^* \implies E - V(x) \leq E - V^* < 0$$

E quindi la disequazione:

$$E - V(x) \geq 0$$

non ammette soluzioni e non vi sono intersezioni tra la retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale. In questo intervallo di energia il moto non è permesso.

b) $E > V^*$

In questo caso la condizione di realtà della radice in (AQ.17) ammette sempre due radici distinte $x_E^{(1)}, x_E^{(2)}$, corrispondenti alle due intersezioni della retta di equazione $y = E$ con la curva dell'energia potenziale; e dal momento che $V(x)$ è monotona crescente per $x > x^*$ e monotona decrescente per $x < x^*$ il moto può avvenire solo nell'intervallo:

$$x_E^{(1)} \leq x \leq x_E^{(2)}$$

La curva di livello relativa all'energia E possiede anche due intersezioni con la retta $x = x^*$ che per comodità possiamo identificare come asse y , corrispondenti alle ordinate:

$$y_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2}{a(x^*)} (E - V^*)}$$

e quindi i due rami si raccordano in un'unica curva chiusa.

La tangente nei punti di intersezione ha coefficiente angolare, dato dall'equazione delle curve integrali, che vale:

$$y'_{\pm} = - \frac{a'(x^*) y_{\pm}}{2 a(x^*)}$$

in quanto, in un punto di minimo dell'energia potenziale $V'(x^*) = 0$.

Notiamo che nel caso in cui $a'(x^*) = 0$, come avviene per esempio per un punto, la y assume massimo modulo nel punto di intersezione, in quanto, altrove $E - V(x) < E - V(x^*)$ e la y'_{\pm} si annulla; quindi la tangente risulta orizzontale.

Inoltre una curva integrale chiusa comporta che il moto sia periodico, perchè ripassa per gli stessi punti di fase, cioè nelle stesse posizioni e con la stessa velocità dopo uno stesso tempo, che si dice periodo del moto.

Data la simmetria delle velocità rispetto ai punti della traiettoria, il periodo si può calcolare come:

$$T = 2 \int_{x_E^{(1)}}^{x_E^{(2)}} \frac{dx}{y(x)} = 2 \int_{x_E^{(1)}}^{x_E^{(2)}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{a(x)} [E - V(x)]}}$$

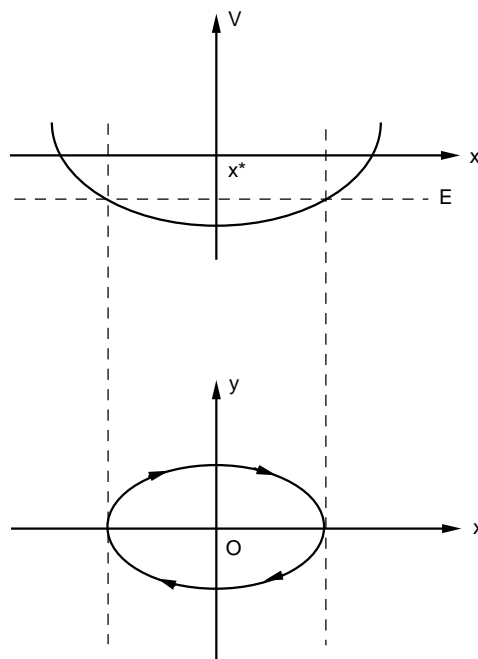


Figura AQ. 10: curve di livello con energia superiore al minimo dell'energia potenziale

c) $E = V^*$

In questo caso, la condizione di realtà della radice in (AQ.17), unitamente alla condizione di minimo relativo, comporta:

$$\begin{cases} E - V(x) = V^* - V(x) \geq 0 \\ V^* - V(x) \leq 0 \end{cases}$$

E quindi esiste l'unica radice x^* dell'equazione:

$$V(x) = E$$

che ha molteplicità $M = 2$, in quanto la retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale hanno un contatto del primo ordine in x^* , e sono tangenti. L'unico punto di fase permesso per il moto è il punto fisso $(x^*, 0)$ che rappresenta l'unica traiettoria di fase possibile (quiete).

Conglobando i risultati relativi a tutti gli intervalli dell'energia meccanica otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di massimo dell'energia potenziale (punto di equilibrio stabile).

- Un punto di equilibrio stabile prende il nome di *centro*.

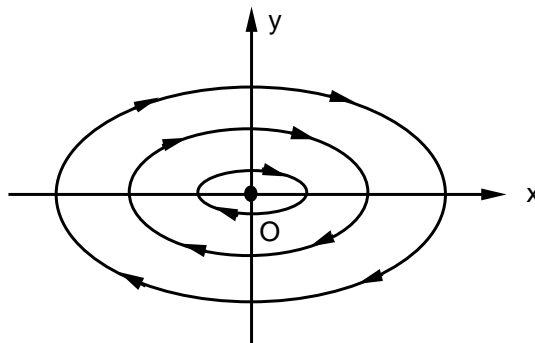


Figura AQ. 11: centro stabile

Possiamo verificare analiticamente che i punti di *equilibrio stabile* rappresentano dei *punti di minimo* per l'energia meccanica del sistema. I

calcoli sono identici al caso del punto di sella, con la differenza che ora $V''(x^*) > 0$ trattandosi di un punto di minimo dell'energia potenziale. Ne viene di conseguenza che la matrice hessiana dell'energia meccanica è definita positiva:

$$\begin{pmatrix} V''(x^*) & 0 \\ 0 & a(x^*) \end{pmatrix}$$

e quindi siamo in un punto di minimo dell'energia.

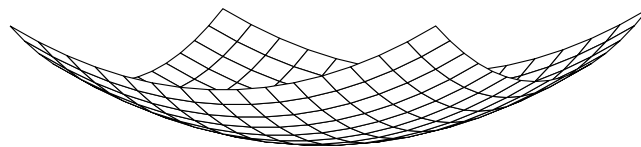


Figura AQ. 12: minimo dell'energia meccanica in un punto di equilibrio stabile

iv) $V(x)$ dotata di un flesso ascendente (discendente) con tangente orizzontale

Quando $V(x)$ presenta un flesso ascendente, con tangente orizzontale, in un punto x^* si ha un punto di equilibrio (punto fisso) che si comporta come fosse stabile rispetto a spostamenti positivi e instabile rispetto a spostamenti negativi, in un intorno del punto; e quindi, complessivamente risulta essere instabile. Indicando con $V^* = V(x^*)$ il valore dell'energia potenziale nel punto di flesso, distinguiamo, come al solito, i tre casi.

a) $E < V^*$

Questo caso si presenta identico al caso in cui $V(x)$ è monotona crescente e valgono tutte le considerazioni svolte al punto i).

Esiste un punto di inversione del moto $x_E < x^*$ e il moto si può realizzare solo nella regione $x \leq x_E$. Non esistono intersezioni della curva di livello con la retta di equazione $x = x^*$.

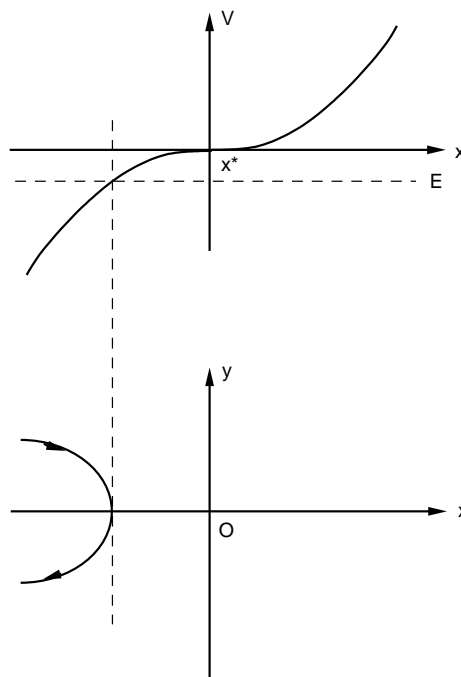


Figura AQ. 13: punto di inversione a sinistra di un flesso ascendente dell'energia potenziale

b) $E > V^*$

Anche in questo caso il comportamento è simile a quello che si ha con $V(x)$ monotona, e quindi esiste un solo punto di inversione $x_E > x^*$ in corrispondenza di ogni valore dell'energia meccanica. Tuttavia la funzione $V(x)$ non è strettamente crescente dappertutto, in quanto nel punto di flesso la sua derivata si annulla. Esistono due punti di intersezione della curva di livello con la retta $x = x^*$, che possiamo scegliere coincidente con l'asse y , le cui ordinate valgono:

$$y_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2}{a(x^*)} [E - V^*]}$$

La derivata di y nei punti di intersezione vale:

$$y'_{\pm} = - \frac{a'(x^*) y_{\pm}}{2 a(x^*)}$$

Notiamo che quando $a'(x^*) = 0$, come nel caso di un punto materiale, la tangente nei punti di intersezione è orizzontale, in quanto $y' = 0$ e i rami della curva di livello — che sono rispettivamente decrescente nel semipiano $y > 0$ e crescente nel semipiano $y < 0$, come nel caso di $V(x)$ strettamente crescente — presentano, di conseguenza, dei flessi nei punti di intersezione con l'asse y .

c) $E = V^*$

Data la condizione di non decrescenza della funzione $V(x)$, dalla condizione di realtà della radice in (AQ.17):

$$E - V(x) = V^* - V(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* \geq x$$

segue che il moto può avvenire solo nella regione $x \leq x^*$.

La radice dell'equazione:

$$V(x) = E$$

è allora x^* e ha molteplicità $M = 3$, dal momento che la funzione da annullare $f(x) = V(x) - E$ ha nulle sia la derivata prima che la derivata seconda in x^* , a causa della presenza del flesso, che richiede $V'(x^*) = 0$, $V''(x^*) = 0$. La retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale hanno un contatto

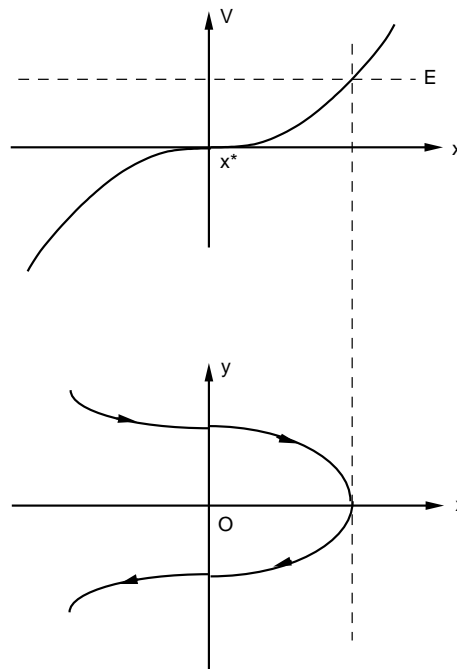


Figura AQ. 14: punto di inversione a destra di un flesso ascendente dell'energia potenziale

del secondo ordine in x^* , e sono quindi tangenti. Il punto $(x^*, 0)$ è una *cuspid*e ed è un punto di equilibrio instabile.

La curva di livello corrispondente ha equazione:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{a(x)} [V^* - V(x)]} \quad (\text{AQ.22})$$

Come si vede facilmente i due rami corrispondenti ai due segni, hanno in comune solo il punto di fase di coordinate $(x^*, 0)$. Si noti che questo è un punto fisso, essendo un punto di equilibrio, e quando viene assegnato come condizione iniziale esso coincide con la traiettoria di fase (quiete).

La tangente alla curva di livello nella cuspidè è indeterminata, come si vede esaminando la (AQ.15) e l'indeterminazione $\frac{0}{0}$ si elimina con lo stesso metodo utilizzato per le curve separatrici. I calcoli sono gli stessi, ma ora $V''(x^*) = 0$ e quindi le due tangenti sono coincidenti tra loro:

$$y'_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{V''(x^*)}{a(x^*)}} = 0$$

Nella cuspidè la tangente è doppia e orizzontale.

Conglobando i risultati relativi a tutti gli intervalli dell'energia meccanica otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di flesso dell'energia potenziale (punto di equilibrio instabile).

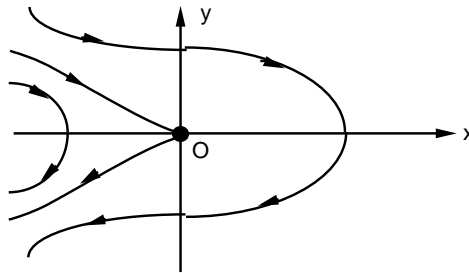


Figura AQ. 15: cuspidè instabile

Qualora si consideri un flesso discendente il diagramma diviene simmetrico rispetto all'asse delle y .

v) $V(x)$ dotata di massimi e minimi alternati

Basandosi sui risultati precedenti è possibile trattare casi più complicati in cui massimi e minimi e flessi si combinano fra loro nell'andamento dell'energia potenziale. Bisogna, in ogni caso, considerare separatamente gli intervalli dell'energia meccanica totale determinati dai valori che l'energia

potenziale assume in corrispondenza dei massimi, dei minimi e dei flessi. I grafici illustrano i casi di un massimo compreso fra due minimi e di un minimo compreso fra due massimi.

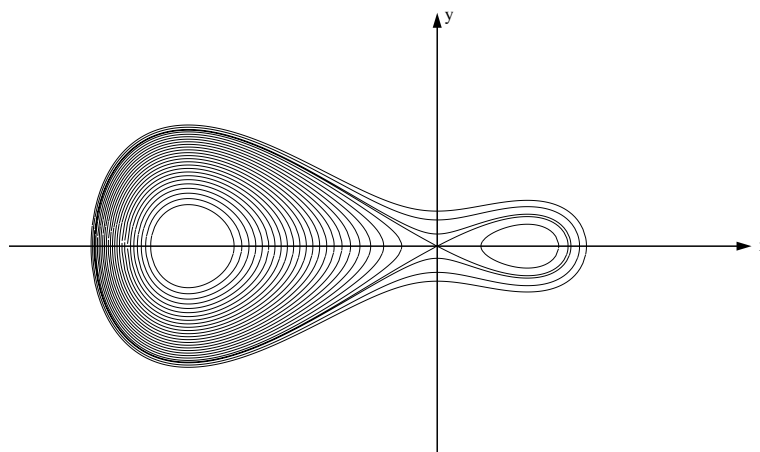


Figura AQ. 16: punto di sella instabile compreso fra due centri stabili

- Si noti che quando sono presenti più punti di sella si hanno tante curve separatrici distinte quanti sono i massimi di $V(x)$ distinti.

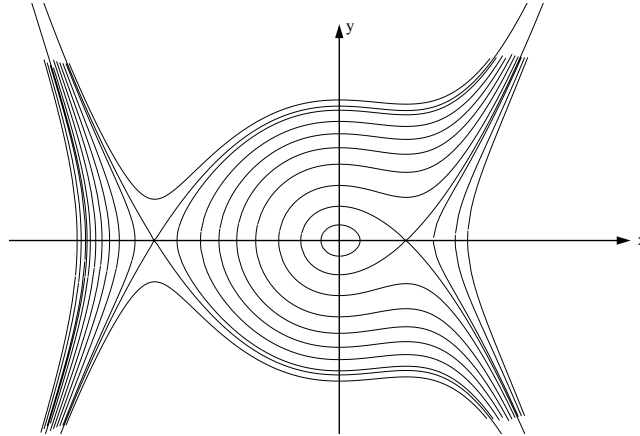


Figura AQ. 17: centro stabile compreso fra due punti di sella instabili

Diagramma di fase del pendolo semplice

Il pendolo semplice è caratterizzato dall'energia potenziale:

$$V(\vartheta) = -m g \ell \cos \vartheta$$

E l'integrale primo dell'energia è dato da:

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 - m g \ell \cos \vartheta = E$$

Le variabili che caratterizzano lo stato del pendolo sono allora $x = \vartheta$, $y = \dot{\vartheta}$. Di conseguenza l'equazione delle curve di livello dell'energia si ottengono trascrivendo l'integrale primo dell'energia in termini di queste variabili:

$$\frac{1}{2} m \ell^2 y^2 - m g \ell \cos x = E$$

Esplicitando y si ha:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m \ell^2} (E + m g \ell \cos x)}$$

essendo $a(x) = m \ell^2$.

I punti fissi sono dati dall'annullarsi della derivata prima dell'energia potenziale e sono alternativamente punti di massimo (punti di sella instabili) e punti di minimo (centri stabili). Infatti abbiamo:

$$V'(x) = m g \ell \sin x, \quad V''(x) = m g \ell \cos x$$

$V'(x)$ si annulla per $x = k \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$.

$$V''(k \pi) = (-1)^k m g \ell$$

Seguono i seguenti risultati:

$$\begin{cases} x = 2k\pi, & V_{2k}^* = m g \ell & \text{minimi (centri stabili)} \\ x = (2k+1)\pi, & V_{2k+1}^* = -m g \ell & \text{massimi (selle instabili)} \end{cases}$$

Notiamo che i valori dei massimi di $V(x)$ sono tutti uguali, per cui le due curve separatrici sono comuni a tutti punti di sella. L'equazione delle curve separatrici si ottiene imponendo all'energia meccanica totale il valore del massimo dell'energia potenziale $m g \ell$. Abbiamo perciò:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell} (1 + \cos x)} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{\ell}} \cos \frac{x}{2}$$

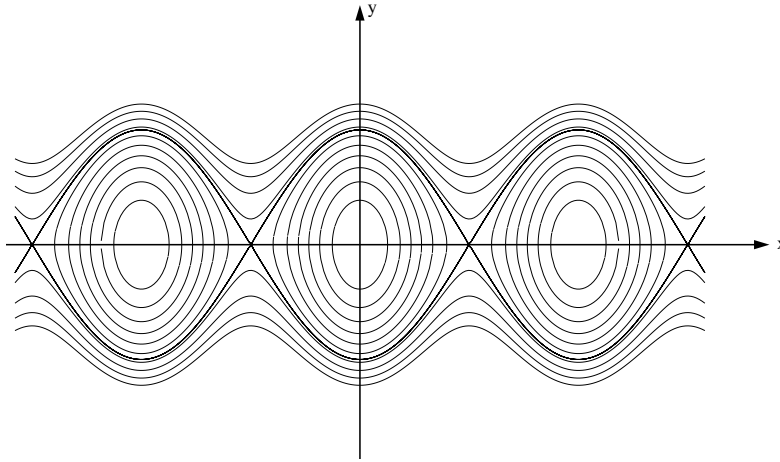


Figura AQ. 18: diagramma di fase del pendolo semplice

Si osserva come, nell'intorno di un centro stabile, per esempio l'origine del piano delle fasi, le curve di livello si approssimano a delle ellissi, cioè alle curve di livello di un oscillatore armonico semplice. Infatti, nel caso di piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile, le equazioni del moto del pendolo si approssimano come è noto, alle equazioni di un oscillatore armonico semplice di frequenza:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

e le relative curve di livello, in questa approssimazione, hanno equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{2(E + m g \ell)}{m g \ell}, \quad b^2 = \frac{2(E + m g \ell)}{m \ell^2}$$

Il termine $m g \ell$ aggiunto all'energia è dovuto al fatto che lo zero del potenziale non coincide, in questo caso, con la posizione di equilibrio stabile del pendolo.

Quando un sistema ammette soluzioni periodiche, come nel caso del pendolo semplice il diagramma di fase si ripete a intervalli regolari e il sistema meccanico assume le stesse configurazioni ad intervalli di tempo regolari. Si può allora dare una rappresentazione più realistica del diagramma di fase, rappresentandolo sulla superficie laterale di un cilindro circolare retto (*cilindro delle fasi*) del quale la rappresentazione nel piano, relativa a un periodo, rappresenta lo sviluppo.

Sistemi autonomi non conservativi

Ci occupiamo ora dei sistemi autonomi non conservativi. In questo caso non disponiamo dell'integrale primo dell'energia e si possono presentare varie situazioni:

i) il sistema delle equazioni del moto è integrabile, come accade, per esempio quando le equazioni sono lineari. In questo caso le traiettorie di fase si ottengono per integrazione diretta delle equazioni del moto;

ii) l'equazione delle curve integrali è integrabile: in questo caso le curve integrali si ottengono integrando questa equazione;

iii) è possibile trovare qualche altro integrale primo del moto, diverso dall'energia; in questo caso le curve di livello dell'integrale primo sono le curve integrali del sistema;

iv) nessuna delle situazioni precedenti si verifica.

— Il primo caso si verifica, ad esempio, quando si tratta il moto armonico in presenza di resistenza viscosa. In questa situazione sappiamo integrare il moto e quindi disponiamo delle equazioni parametriche delle traiettorie di fase. L'integrale generale del moto è del tipo:

$$x = A e^{-pt} \cos(\hat{\omega}t + \gamma), \quad \hat{\omega} = \sqrt{\omega^2 - p^2}$$

Da cui segue:

$$y = -px - \hat{\omega} A e^{-pt} \text{sen}(\hat{\omega}t + \gamma)$$

Le equazioni parametriche rappresentano una traiettoria di fase dall'andamento spiraliforme, che tende asintoticamente alla posizione di equilibrio stabile dell'oscillatore. Una rappresentazione significativa della traiettoria di fase si ottiene eliminando parzialmente il parametro t , esprimendo:

$$\cos(\hat{\omega}t + \gamma) = \frac{x}{A e^{-pt}}, \quad \text{sen}(\hat{\omega}t + \gamma) = -\frac{y + px}{\hat{\omega} A e^{-pt}}$$

Da cui quadrando e sommando otteniamo:

$$\frac{x^2}{A^2 e^{-2pt}} + \frac{(y + px)^2}{\hat{\omega}^2 A^2 e^{-2pt}} = 1$$

Equazione che ricorda quella di un'ellisse di centro nell'origine e assi non coincidenti con gli assi cartesiani; si nota però che a denominatore sono presenti delle funzioni del tempo che hanno l'effetto di modificare istante per istante le lunghezze dei semiassi.

— Come secondo esempio consideriamo un caso in cui si integra facilmente l'equazione delle curve integrali, come accade quando si considera il moto di un corpo che si muove in presenza di una resistenza idraulica, al quale è stata impressa una elevata velocità iniziale, di modo che le altre forze sono trascurabili, almeno in un certo intervallo di tempo, rispetto alla resistenza del mezzo.

In questa situazione, schematizzando il corpo con un punto, l'equazione differenziale del moto si scrive:

$$m \ddot{x} = -h \dot{x}^2$$

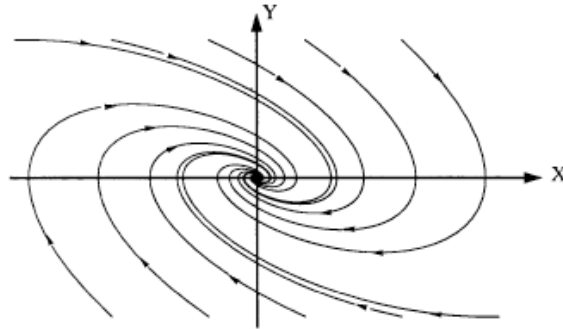


Figura AQ. 19: traiettorie di fase dell'oscillatore smorzato

E l'equazione delle curve integrali diviene semplicemente:

$$y' = -\frac{h}{m} y$$

Questa è un'equazione lineare e si integra subito, ottenendo:

$$y = y_0 e^{-\frac{h}{m}(x-x_0)}$$

Al variare delle condizioni iniziali del moto (x_0, y_0) si ottiene l'intera famiglia delle curve integrali.

— Come terzo esempio consideriamo un punto soggetto ad una forza che somiglia a una forza elastica ma, in luogo della costante elastica, è presente una funzione lineare della velocità $\alpha \dot{x}$:

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} x = 0$$

L'equazione del moto si può riscrivere evidenziando l'esistenza di un integrale primo del moto:

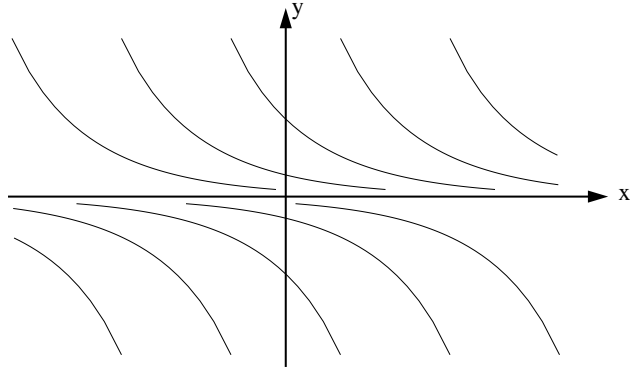


Figura AQ. 20: curve integrali del moto di un punto soggetto a resistenza idraulica

$$\frac{d}{dt} \left(m \dot{x} + \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m \dot{x} + \frac{1}{2} \alpha x^2 = C$$

Allora le curve di livello di questo integrale primo:

$$y = \frac{1}{m} \left(C - \frac{1}{2} \alpha x^2 \right)$$

rappresentano le curve integrali del sistema.

Linearizzazione nell'intorno di un punto singolare

In molti problemi, però, non si sanno integrare nè le equazioni del moto, nè l'equazione delle curve integrali, nè si conoscono degli integrali primi del moto. In questi casi si può ricorrere ad un metodo di approssimazione del sistema differenziale delle equazioni del moto, linearizzandole nell'intorno di un punto di fase, per avere delle indicazioni sull'andamento delle traiettorie di fase in quell'intorno.

Consideriamo un sistema autonomo:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) \equiv \begin{pmatrix} y \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{AQ.23})$$

in cui:

$$\mathbf{f} : A \longrightarrow R^2, \quad A \subseteq R^2$$

è supposta, al solito, differenziabile e lipschitziana, per garantire l'unicità della soluzione; inoltre richiediamo che nel punto di fase $\mathbf{u}^* \in A$ la matrice jacobiana della \mathbf{f} :

$$\mathcal{A}^* \equiv \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} (u_\ell^*) \right\| \quad (\text{AQ.24})$$

sia non singolare. Allora possiamo scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della \mathbf{f} nell'intorno di \mathbf{u}^* :

$$f_i(u_\ell) = f_i(u_\ell^*) + \frac{\partial f_i}{\partial u_k} (u_\ell^*) (u_k - u_k^*) + R_i(2)$$

Ovvero in forma simbolica:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*) + \mathcal{A}^* (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \mathbf{R}(2)$$

Fino a che il moto, e quindi le traiettorie di fase, si mantengono in un intorno di \mathbf{u}^* di raggio ε opportunamente piccolo, si ha:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\| < \varepsilon$$

e il resto della serie si può considerare trascurabile a meno di un errore dell'ordine di ε^2 . Grazie al fatto che la matrice è supposta non singolare, il termine del primo ordine è sempre non nullo per $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}^*$.

- Notiamo che questa circostanza può essere verificata in ogni istante di tempo successivo a quello iniziale solo quando \mathbf{u}^* è un punto di equilibrio stabile, in quanto in questo caso, se la condizione iniziale viene assegnata in un intorno di \mathbf{u}^* , il moto e quindi le traiettorie di fase non escono dall'intorno. Se invece \mathbf{u}^* non è un punto di equilibrio stabile, l'approssimazione sarà verificata solamente nei limiti di un opportuno intervallo di tempo, entro il quale le traiettorie si mantengono nell'intorno. Successivamente i termini di ordine superiore al primo divengono gradualmente più elevati e l'approssimazione non è più valida.

Nell'approssimazione lineare, allora il sistema delle equazioni del moto viene scritto nella forma:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*) + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)$$

Normalmente i punti di fase nell'intorno dei quali è interessante studiare il comportamento delle traiettorie di fase, sono punti singolari e in particolare i punti di equilibrio del sistema. Ma in un punto di equilibrio si ha $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = 0$; quindi il sistema delle equazioni linearizzate si riscrive:

$$\dot{\mathbf{z}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \quad (\text{AQ.25})$$

dove, per comodità sono state introdotte le coordinate relative al punto di equilibrio.

Classificazione dei punti singolari

Per classificare i vari tipi di punti singolari che possono presentarsi in un sistema linearizzato ed esaminare l'andamento delle traiettorie di fase, e quindi la stabilità dell'equilibrio, occorre integrare il sistema lineare (AQ.25); infatti le soluzioni del sistema forniscono le equazioni parametriche delle traiettorie di fase. Ora, per facilitare l'eliminazione del parametro t e ottenere, di conseguenza, delle equazioni cartesiane delle traiettorie di fase più semplici e più facilmente interpretabili, conviene effettuare un cambio di variabili prima di integrare il sistema (AQ.25).

L'ideale è cercare di diagonalizzare, quando è possibile, la matrice \underline{A}^* , perchè questo equivale ad ottenere delle equazioni disaccoppiate. A questo scopo consideriamo il problema agli autovalori:

$$(\underline{A}^* - \lambda \underline{I}) \mathbf{d} = 0$$

Gli autovalori sono dati dall'equazione caratteristica:

$$\det(\underline{A}^* - \lambda \underline{I}) = 0$$

che è, in questo caso, un'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - 2p\lambda + q = 0 \quad (\text{AQ.26})$$

nella quale:

$$2p = \text{tr}(\underline{A}^*), \quad q = \det(\underline{A}^*)$$

Data la struttura (AQ.23) del sistema differenziale, la matrice \underline{A}^* non è generalmente simmetrica avendo la struttura seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^*, 0) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^*, 0) \end{pmatrix}$$

essendo $\mathbf{u}^* \equiv (x^*, 0)$ il punto di equilibrio considerato. Questo comporta che i suoi autovalori non sono necessariamente reali, diversamente da quanto accade per le matrici simmetriche. Dovremo esaminare, perciò, le diverse possibilità che possono presentarsi in dipendenza del segno del discriminante $\frac{\Delta}{4} = p^2 - q$ dell'equazione caratteristica (AQ.26) del sistema.

1 - autovalori reali distinti: $p^2 - q > 0$

Gli autovalori sono dati da:

$$\lambda^{(1)} = p - \sqrt{p^2 - q}, \quad \lambda^{(2)} = p + \sqrt{p^2 - q}$$

In corrispondenza dei due autovalori distinti, il problema agli autovalori ammette sempre due autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$, i quali non sono generalmente ortogonali tra loro. La trasformazione di similitudine ottenuta mediante la matrice \mathcal{S} di elementi:

$$S_{ik} = d_i^{(k)}$$

porta la matrice \mathcal{A} nella forma diagonale:

$$\hat{\mathcal{A}}^* = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{A}^* \mathcal{S}$$

e trasforma i vettori \mathbf{z} secondo la legge:

$$\mathbf{z} = \mathcal{S} \hat{\mathbf{z}}$$

Il sistema differenziale per i nuovi stati $\hat{z} \equiv (\xi, \eta)$ diviene allora:

$$\mathcal{L} \dot{\hat{z}} = \hat{\mathcal{A}}^* \mathcal{L} \hat{z}$$

E quindi:

$$\dot{\hat{z}} = \hat{\mathcal{A}}^* \hat{z}$$

Ovvero, esplicitamente:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda^{(1)} \xi \\ \dot{\eta} = \lambda^{(2)} \eta \end{cases}$$

Le due equazioni sono disaccoppiate e l'integrale generale si scrive nella forma, comoda da gestire:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 e^{\lambda^{(1)} t} \\ \eta = \eta_0 e^{\lambda^{(2)} t} \end{cases} \quad (\text{AQ.27})$$

Queste rappresentano anche le equazioni parametriche delle traiettorie di fase nel nuovo sistema di coordinate. Si osserva subito che per $\xi_0 = 0$ si ottiene come traiettoria di fase l'asse delle ordinate e per $\eta_0 = 0$ si ottiene l'asse delle ascisse. Per valori non nulli delle condizioni iniziali si procede all'eliminazione del parametro t , ricavando:

$$t = \log \left[\left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{\lambda^{(1)}}} \right]$$

E quindi:

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}}}$$

In conclusione le traiettorie di fase hanno equazioni cartesiane:

$$\eta = k \xi^\alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}}, \quad k = \eta_0 \xi_0^{-\alpha} \quad (\text{AQ.28})$$

Discutiamo i vari casi che si presentano in funzione dei valori assunti dal rapporto α tra gli autovalori. Non dimentichiamo che la matrice, per ipotesi è non singolare e quindi gli autovalori sono entrambi non nulli, per cui si ha, in ogni caso $0 < |\alpha| < +\infty$ e inoltre $\alpha \neq 1$, in quanto gli autovalori devono essere distinti.

Nodi: $\alpha > 0$

Cominciamo ad esaminare il caso in cui $\alpha > 0$: le traiettorie presentano un andamento simile a quello parabolico e le singolarità si dicono *nodi*. Si hanno le due possibilità:

i) $0 < \alpha < 1$

In questa situazione le traiettorie di fase, che passano tutte per l'origine, hanno tangente comune verticale. Infatti:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \alpha k \xi^{\alpha-1}$$

Ed essendo, $\alpha - 1 < 0$ segue:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{d\eta}{d\xi} \right| = +\infty$$

Per quanto riguarda la stabilità del nodo, occorre determinare il verso di percorrenza delle traiettorie, facendo attenzione che, dopo la trasformazione, l'ordinata non rappresenta più la derivata temporale dell'ascissa, e quindi non determina il verso di percorrenza. Bisogna tornare alle equazioni parametriche (AQ.27). La positività di α impone agli autovalori di avere segno concorde: allora o sono entrambi positivi o entrambi negativi. Nel primo caso $|\xi|$ ed $|\eta|$ sono esponenziali crescenti e il moto tende ad allontanarsi dall'origine e si ha, quindi, instabilità; nel secondo caso gli esponenziali sono decrescenti e si ha stabilità asintotica.

• Notiamo, che per la regola dei segni di Cartesio, nell'equazione caratteristica, due radici positive (instabilità) corrispondono a due variazioni di segno dei coefficienti, e due radici negative (stabilità) a due permanenze. Ma il determinante $q = \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} > 0$ in ogni caso, dovendo essere $\alpha > 0$, e quindi la stabilità è decisa dal segno di p . Si ha stabilità per $p < 0$ e instabilità per $p > 0$. La stabilità è asintotica come si vede considerando il limite per $t \rightarrow +\infty$ nelle equazioni parametriche (AQ.27).

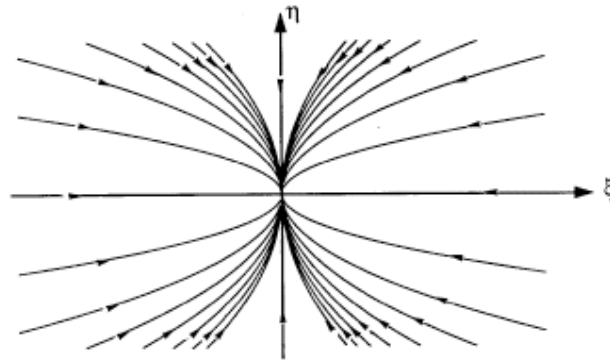


Figura AQ. 21: nodo stabile con tangente verticale

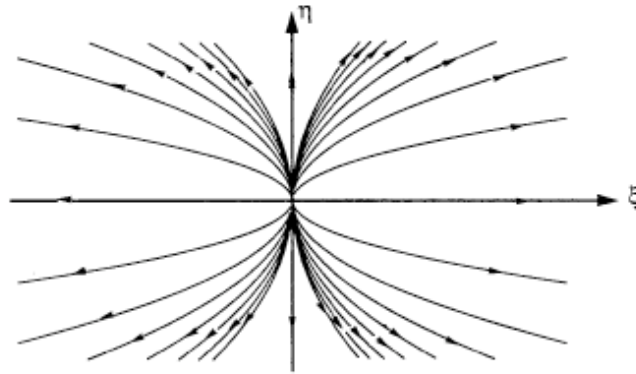


Figura AQ. 22: nodo instabile con tangente verticale

ii) $\alpha > 1$

In questo caso la struttura delle traiettorie è simile alla precedente, ma la tangente comune nell'origine è orizzontale, in quanto $\alpha - 1 > 0$ e quindi:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

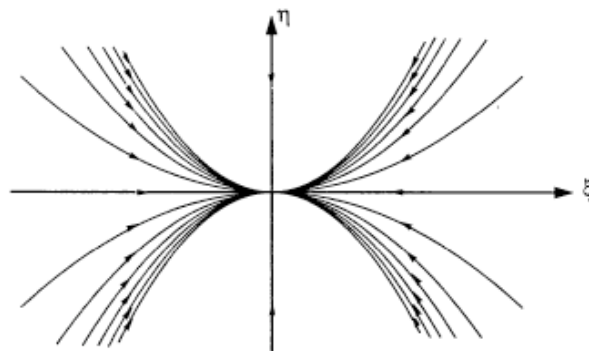


Figura AQ. 23: nodo stabile con tangente orizzontale

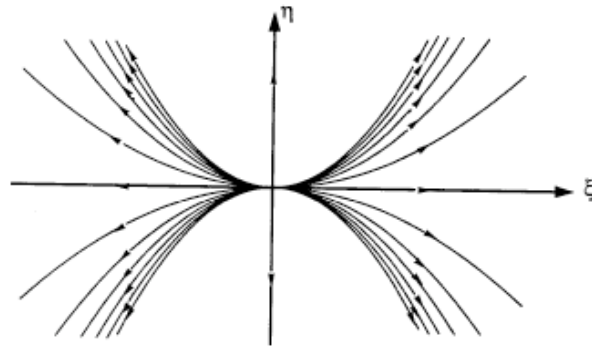


Figura AQ. 24: nodo instabile con tangente orizzontale

Punti di sella: $\alpha < 0$

Quando $\alpha < 0$ i segni degli autovalori risultano discordi e si ha:

$$\alpha = -|\alpha|, \quad q < 0$$

L'equazione cartesiana delle traiettorie si può scrivere allora:

$$\eta \xi^{|\alpha|} = k$$

Le traiettorie presentano una struttura di tipo iperbolico. I segni degli autovalori sono discordi e di conseguenza i punti di sella sono sempre instabili, come si vede esaminando le equazioni parametriche (AQ.27); la matrice non è definita di segno.

2 - autovalori reali coincidenti: $p^2 - q = 0$

Le singolarità che si ottengono in questo caso, in cui gli autovalori sono dati da:

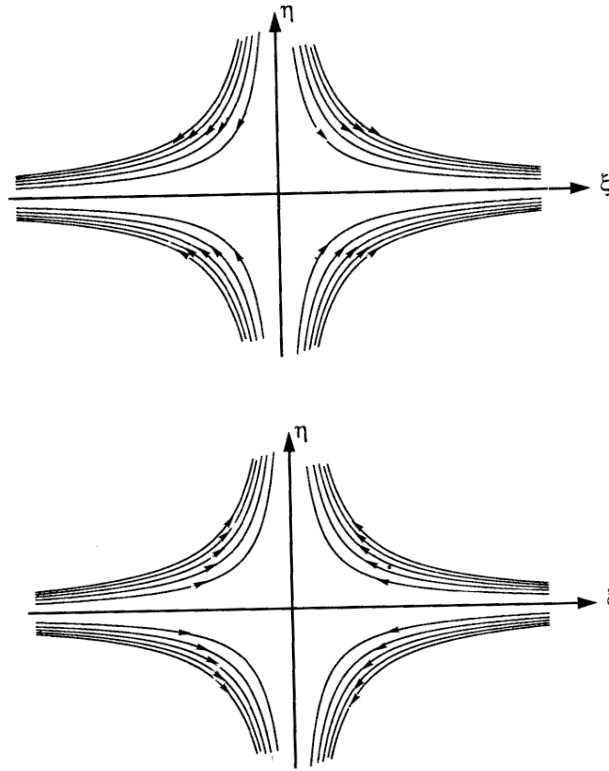


Figura AQ. 25: punti di sella instabili

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = p$$

sono chiamate:

Nodi degeneri

Quando gli autovalori sono coincidenti possono presentarsi due situazioni.

i) \underline{A}^* diagonalizzabile

In corrispondenza dei due autovalori reali coincidenti, esistono due autovettori linearmente indipendenti.

In questo caso \underline{A}^* è diagonalizzabile, in quanto si può costruire una matrice $\underline{\mathcal{L}}$ non singolare, che porta i vettori di base dello spazio a coincidere con gli autovettori, che formano essi pure una base. Allora il sistema differenziale (AQ.25) si riconduce, nelle nuove variabili in cui la matrice è diagonale, nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = p \xi \\ \dot{\eta} = p \eta \end{cases}$$

l'integrale generale del quale fornisce le equazioni parametriche delle traiettorie di fase:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 e^{pt} \\ \eta = \eta_0 e^{pt} \end{cases} \quad (\text{AQ.29})$$

Anche in questo caso gli assi cartesiani sono traiettorie di fase, come si vede assegnando alternativamente una condizione iniziale nulla. L'eliminazione del parametro conduce all'equazione delle traiettorie:

$$\eta = k \xi, \quad k = \frac{\eta_0}{\xi_0}$$

La stabilità è decisa dal segno dell'autovalore doppio che è uguale a p ; e risulta anche in questo caso che il nodo è stabile per $p < 0$ e instabile per $p > 0$.

• *Osservazione.* In questo caso in cui si hanno due autovettori linearmente indipendenti (base) con un autovalore doppio, tutti i vettori del piano delle fasi, essendo esprimibili come combinazione lineare degli autovettori, sono a

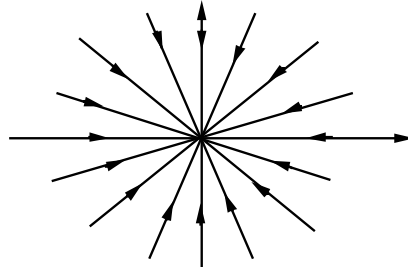


Figura AQ. 26: nodo degenere stabile

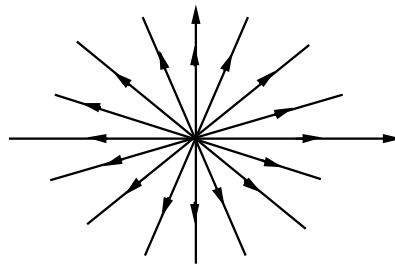


Figura AQ. 27: nodo degenere instabile

loro volta autovettori e la matrice è una trasformazione isotropa: $\underline{A}^* = p \underline{I}$. Di conseguenza la matrice è già in forma diagonale. Per cui questo caso non può verificarsi quando il sistema deriva da un'equazione del secondo ordine, come nel nostro caso.

ii) \underline{A}^* non diagonalizzabile

In corrispondenza dei due autovalori reali coincidenti, esiste un solo autovettore linearmente indipendente.

In questo caso si ha a disposizione un solo autovettore indipendente, in quanto anche gli autovettori sono coincidenti, e manca una base di autovettori.

E quindi non si può diagonalizzare la matrice. Tuttavia è possibile portare la matrice in una forma parzialmente semplificata (*forma di Jordan*), costruendo una matrice di similitudine \mathcal{S} definita nel modo seguente:

$$\mathcal{S} \equiv \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ d_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

dove:

$$\mathbf{d} \equiv (d_1, d_2)$$

è l'unico autovettore, normalizzato all'unità e:

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)$$

è un vettore che forma con esso una base ortogonale e non è evidentemente autovettore. Allora si ha:

$$\mathbf{d}^2 = 1, \quad \mathbf{d} \times \mathbf{u} = 0$$

Gli elementi della matrice riferita alla base di questi due vettori, cioè dopo la trasformazione di similitudine indotta da \mathcal{S} sono allora i seguenti:

$$\hat{A}_{11}^* = \mathbf{d} \times \mathcal{A}^* \mathbf{d} = \lambda = p, \quad \hat{A}_{12}^* = \mathbf{d} \times \mathcal{A}^* \mathbf{u} = 1$$

$$\hat{A}_{21}^* = \mathbf{u} \times \mathcal{A}^* \mathbf{d} = \lambda \mathbf{u} \times \mathbf{d} = 0 \quad \hat{A}_{22}^* = \mathbf{u} \times \mathcal{A}^* \mathbf{u} = p$$

I valori di A_{11} e di A_{21} si ottengono facilmente tenendo conto che \mathbf{d} è autovettore ricordando la relazione di ortogonalità tra i due vettori \mathbf{d}, \mathbf{u} . Il

valore di A_{12} non è noto a priori, e può essere sempre posto uguale all'unità, definendo opportunamente il modulo di \mathbf{u} . Siamo sicuri che $A_{12} \neq 0$, altrimenti la matrice risulterebbe diagonale, e \mathbf{u} sarebbe autovettore, contro l'ipotesi. Il valore di A_{22} si determina tenendo conto che la trasformazione di similitudine non altera la traccia di una matrice, per cui:

$$\text{tr}(\hat{\mathcal{A}}^*) = \text{tr}(\mathcal{A}^*), \quad \implies \quad p + A_{22} = 2p \quad \implies \quad A_{22} = p$$

Allora si ha la matrice nella forma di Jordan:

$$\hat{\mathcal{A}}^* \equiv \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

Il sistema delle equazioni differenziali, per le nuove variabili diviene, di conseguenza:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = p\xi + \eta \\ \dot{\eta} = p\eta \end{cases}$$

E' immediato ottenere, dalla seconda equazione:

$$\eta = \eta_0 e^{pt}$$

Sostituendo nella prima equazione abbiamo:

$$\dot{\xi} = p\xi + \eta_0 e^{pt}$$

L'integrale generale di quest'ultima è la somma dell' integrale generale $\hat{\xi}$ della omogenea associata:

$$\dot{\xi} = p \xi$$

e di un integrale particolare ξ_1 della non omogenea. E' facile verificare che:

$$\hat{\xi} = \xi_0 e^{pt}, \quad \xi_1 = \eta_0 t e^{pt}$$

Quindi l'integrale generale del sistema risulta essere:

$$\begin{cases} \xi = (\xi_0 + \eta_0 t) e^{pt} \\ \eta = \eta_0 e^{pt} \end{cases}$$

Sono queste le equazioni parametriche delle traiettorie di fase. Si osserva che le traiettorie attraversano l'asse delle ordinate, in corrispondenza del valore del tempo $\tau = -\frac{\xi_0}{\eta_0}$.

Il rapporto tra le due equazioni conduce a:

$$\xi = \frac{\xi_0 + \eta_0 t}{\eta_0} \eta$$

L'eliminazione completa del parametro si effettua risolvendo t dalla seconda equazione parametrica:

$$t = \frac{1}{\eta_0} \log \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)$$

Si ha allora l'equazione cartesiana delle traiettorie di fase in forma esplicitata rispetto a ξ :

$$\xi = \frac{\xi_0}{\eta_0} \eta + \frac{\eta}{\eta_0} \log \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)$$

Differenziando possiamo ricavare informazioni sul comportamento della tangente alla traiettoria di fase:

$$d\xi = \left\{ \frac{\xi_0}{\eta_0} + \frac{1}{p} \left[1 + \log \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right) \right] \right\} d\eta$$

Da cui:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\left\{ \frac{\xi_0}{\eta_0} + \frac{1}{p} \left[1 + \log \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right) \right] \right\}}$$

Si ha allora:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

Quindi la tangente nell'origine è comune a tutte le traiettorie di fase ed è orizzontale.

Per quanto riguarda la stabilità, esaminando le equazioni parametriche e osserviamo che per $t \rightarrow +\infty$ il fattore esponenziale è prevalente e risulta crescente per $p > 0$ e decrescente per $p < 0$, e l'equilibrio risulta instabile nel primo caso e asintoticamente stabile nel secondo.

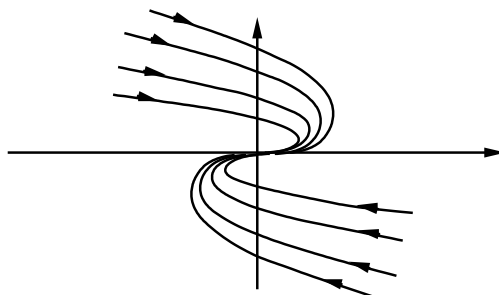


Figura AQ. 28: nodo degenere stabile

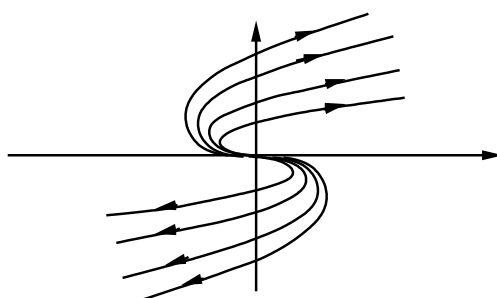


Figura AQ. 29: nodo degenere instabile

3 - autovalori complessi coniugati: $p^2 - q < 0$

Fuochi

Gli autovalori sono dati da:

$$\lambda^{(1)} = p - i\sqrt{q - p^2}, \quad \lambda^{(2)} = p + i\sqrt{q - p^2}$$

Anche nel caso complesso, come in quello reale, in corrispondenza di due autovalori distinti, il problema agli autovalori ammette sempre due autovettori

linearmente indipendenti $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$, che formano, quindi, una base, essendo l'uno il complesso coniugato dell'altro. La trasformazione di similitudine ottenuta mediante la matrice \mathcal{S} di elementi:

$$S_{ik} = d_i^{(k)}$$

porta, anche in questo caso, la matrice $\hat{\mathcal{A}}^*$ nella forma diagonale:

$$\hat{\mathcal{A}}^* = \mathcal{S}^{-1} \hat{\mathcal{A}}^* \mathcal{S}$$

e trasforma i vettori \mathbf{z} secondo la legge:

$$\mathbf{z} = \mathcal{S} \hat{\mathbf{z}}$$

Il sistema differenziale per i nuovi stati $\hat{\mathbf{z}} \equiv (\xi, \eta)$ diviene allora:

$$\mathcal{S} \dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathcal{A}}^* \mathcal{S} \hat{\mathbf{z}}$$

E quindi:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathcal{A}}^* \hat{\mathbf{z}}$$

Ovvero, esplicitamente:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda^{(1)} \xi \\ \dot{\eta} = \lambda^{(2)} \eta \end{cases}$$

Le due equazioni sono disaccoppiate e sono l'una complessa coniugata dell'altra; l'integrale generale si scrive:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 e^{pt} e^{-i\sqrt{q-p^2}t} \\ \eta = \eta_0 e^{pt} e^{i\sqrt{q-p^2}t} \end{cases}$$

essendo η, η_0 complesse coniugate di ξ, ξ_0 . Conviene allora separare la parte reale da quella immaginaria:

$$\xi = X + iY, \quad \eta = X - iY, \quad \xi_0 = X_0 + iY_0, \quad \eta_0 = X_0 - iY_0$$

ottenendo:

$$\begin{cases} X = A e^{pt} \cos(\sqrt{q-p^2}t + \gamma) \\ Y = -A e^{pt} \operatorname{sen}(\sqrt{q-p^2}t + \gamma) \end{cases} \quad (\text{AQ.30})$$

dove si è tenuto conto del fatto che:

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \quad \operatorname{sen} \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

e si è posto:

$$A = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}, \quad \cos \gamma = \frac{X_0}{A}, \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{Y_0}{A}$$

Abbiamo così ricavato, anche in questo caso, le equazioni parametriche della traiettoria di fase. Quadrando e sommando eliminiamo parzialmente il parametro t ricavando:

$$X^2 + Y^2 = A^2 e^{2pt}$$

Questa rappresenta una traiettoria di fase ad andamento spiraliforme. Una singolarità di questo tipo prende il nome di *fuoco*. Per $p > 0$ il moto tende ad allontanarsi indefinitamente dal punto di equilibrio e si ha quindi un *fuoco instabile*, mentre per $p < 0$ la curva tende a schiacciarsi sul punto fisso, e il moto tende asintoticamente all'origine; si ha allora un *fuoco stabile*. Quando il fuoco è stabile il sistema compie delle oscillazioni smorzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile, come si è già visto esaminando l'oscillatore armonico smorzato.

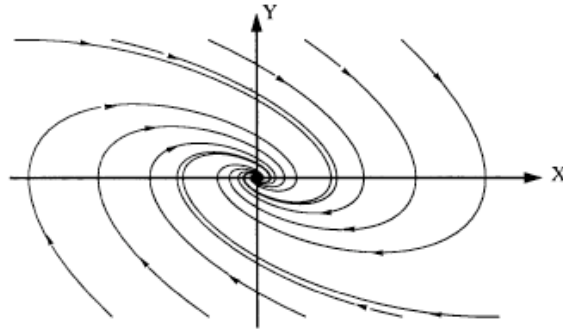


Figura AQ. 30: fuoco stabile

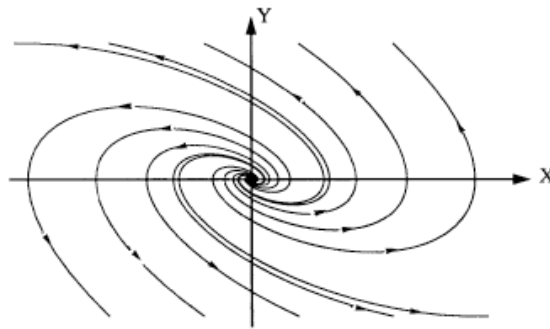


Figura AQ. 31: fuoco instabile

Stabilità

Si può osservare che in tutti i casi esaminati, con la sola eccezione dei punti di sella, che sono sempre instabili, vale il seguente criterio generale per la stabilità dei punti di equilibrio:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{z}\| = \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 0 \text{ equilibrio instabile} \\ 0 & \text{se } p < 0 \text{ equilibrio asintoticamente stabile} \end{cases}$$

• Notiamo anche come i segni degli autovalori sono legati alla definitezza di segno della matrice, la quale è definita negativa se l'equilibrio è stabile e definita positiva o non definita di segno se l'equilibrio è instabile.

• *Regola della divergenza.* Ricordiamo, infine, che il parametro p è legato alla traccia della matrice \underline{A}^* dalla relazione:

$$2p = \text{tr}(\underline{A}^*) = A_{11}^* + A_{22}^*$$

Inoltre, per la (AQ.24), che definisce la matrice \underline{A}^* , abbiamo:

$$A_{11}^* = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, 0), \quad A_{22}^* = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, 0)$$

Quindi si ottiene:

$$2p = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, 0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, 0) = \nabla \times \mathbf{f}|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*}, \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

La stabilità di un punto singolare, non di sella, si può valutare calcolando la divergenza del vettore \mathbf{f} che caratterizza il sistema, nel punto singolare. Se questa è negativa l'equilibrio è stabile, se è positiva è instabile.

Quadro riassuntivo

Possiamo riassumere tutti i risultati precedenti nel seguente quadro.

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} p^2 - q \left\{ \begin{array}{l} > 0, q \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ nodi, } p \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ instabili} \\ < 0 \text{ stabili} \end{array} \right. \\ < 0 \text{ punti di sella instabili} \end{array} \right. \\ \\ = 0 \text{ nodi degeneri, } p \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ instabili} \\ < 0 \text{ stabili} \end{array} \right. \\ \\ < 0, p \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ fuochi instabili} \\ = 0 \text{ centri stabili} \\ < 0 \text{ fuochi stabili} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

che risulta meglio visualizzabile mediante un grafico nel piano delle variabili q, p .

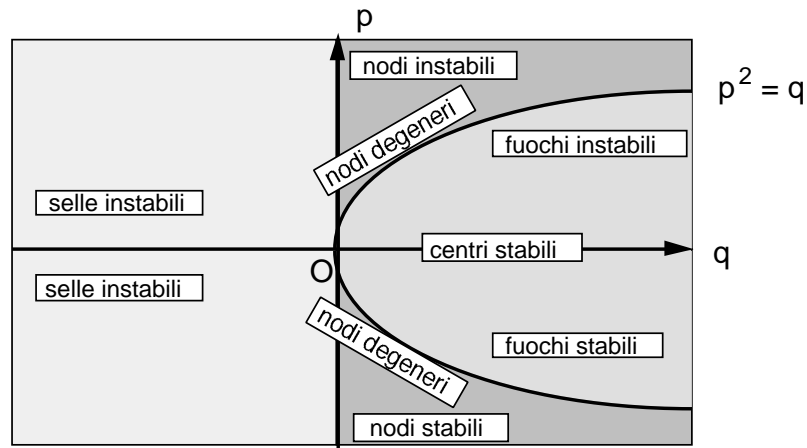


Figura AQ. 32: grafico riassuntivo delle singolarità al variare di p, q

Pendolo in presenza di resistenza del mezzo

L'equazione del secondo ordine che governa il moto del pendolo, in presenza di resistenza del mezzo, è la seguente:

$$m \ell^2 \ddot{\vartheta} + h \ell \dot{\vartheta} + m g \text{sen } \vartheta = 0$$

Il sistema delle equazioni del primo ordine è allora:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \text{sen } x + 2py \end{cases}$$

essendo:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}, \quad -2p = \frac{h}{m\ell}$$

Notiamo, che per definizione p è sempre negativo. Si ha quindi:

$$\varphi(x, y) = -\omega^2 \operatorname{sen} x + 2py$$

Segue che:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\omega^2 \cos x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2p$$

I punti di equilibrio sono:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \pi$$

Le soluzioni periodiche individuano le stesse configurazioni. Abbiamo allora, all'equilibrio le seguenti matrici:

i) *nel punto di equilibrio:* $x_1^* = 0$

$$\tilde{A}^* \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 2p \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 2p\lambda + \omega^2 = 0$$

— Quando il suo discriminante ridotto:

$$\frac{\Delta}{4} = p^2 - \omega^2$$

è positivo abbiamo due radici reali distinte. Poichè $p < 0$ e $q = \omega^2 > 0$ si ha che la singolarità è un *nodo stabile*. Siamo nel caso in cui la resistenza del mezzo è prevalente.

— Quando il discriminante è nullo si hanno due radici reali coincidenti, e quindi si ha un *nodo degenere*, che, essendo $p < 0$, è stabile.

— Quando il discriminante è negativo si hanno due radici complesse coniugate, quindi si ha un *fuoco stabile*, essendo $p < 0$.

ii) *nel punto di equilibrio*: $x_2^* = \pi$

$$A^* \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 2p \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 2p\lambda - \omega^2 = 0$$

Il discriminante ridotto:

$$\frac{\Delta}{4} = p^2 + \omega^2$$

è sempre positivo e quindi abbiamo due radici reali distinte. Poichè $p < 0$ e $q = -\omega^2 < 0$ si ha che la singolarità è un *punto di sella* sempre instabile.

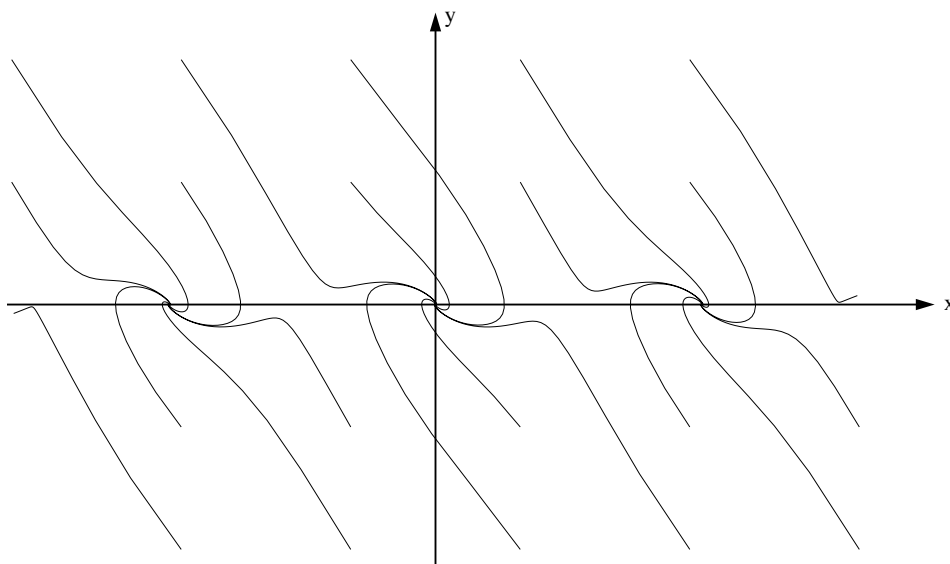


Figura AQ. 33: diagramma di fase del pendolo in presenza di forte resistenza del mezzo

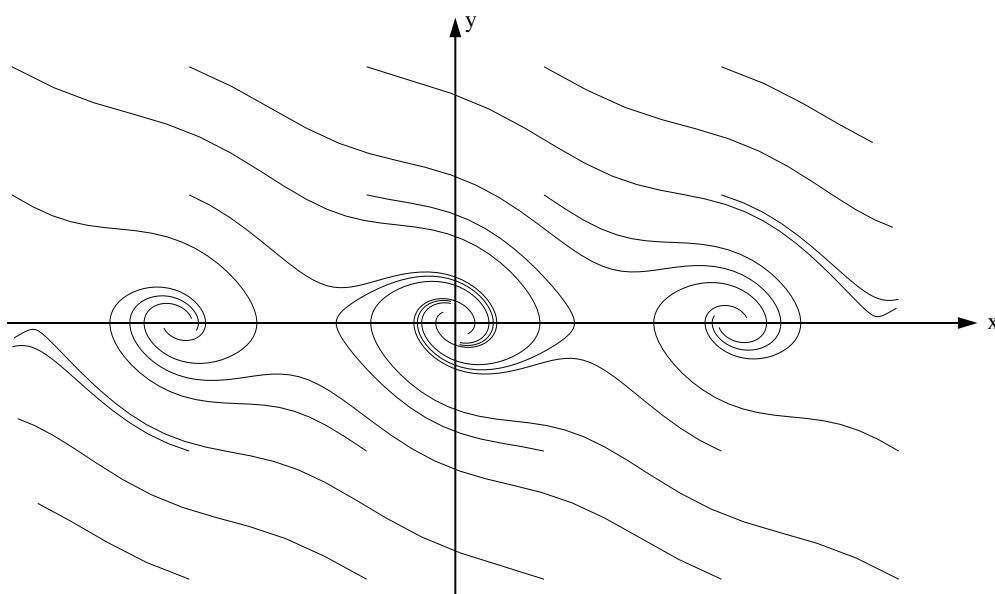


Figura AQ. 34: diagramma di fase del moto oscillatorio smorzato del pendolo

Soluzioni periodiche e cicli limite

Si dice *soluzione periodica* di un sistema differenziale, una soluzione $\mathbf{u}(t)$ tale che è possibile trovare un intervallo di tempo τ dopo il quale la soluzione si ripete in ogni istante, cioè:

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t), \quad \forall t > 0$$

Si chiama allora *periodo* il minimo dei valori positivi che τ può assumere:

$$T = \min_{\tau \in \mathcal{A}} \tau, \quad \mathcal{A} = \{\tau \in R^+ ; \mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t), \forall t > 0\}$$

Si dice *ciclo limite* una soluzione periodica $\mathbf{u}_L(t)$ che gode delle seguenti proprietà:

i) esiste un $\varepsilon \in R^+$ tale che qualunque altra traiettoria di fase, distinta dal ciclo limite, per cui, almeno in un punto \mathbf{u} si ha:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_L\| < \varepsilon$$

non è una soluzione periodica del sistema. Per questo si dice che il ciclo limite rappresenta una soluzione periodica *isolata*.

ii) Ogni altra soluzione nell'intorno del ciclo tende asintoticamente al ciclo o proviene asintoticamente dal ciclo, cioè si verifica una delle due condizioni:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_L\| = 0$$

oppure:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_L\| = 0$$

Se si verifica, per ogni soluzione nell'intorno del ciclo, la prima situazione, si dice che il ciclo è stabile; se si verifica sempre la seconda situazione si dice che il ciclo è instabile. Se si verifica una delle due situazioni per le soluzioni le cui condizioni iniziali sono esterne alla curva di fase che identifica il ciclo e l'altra per le soluzioni le cui condizioni iniziali sono interne, si parla di ciclo semistabile.

- Perchè si abbia un ciclo limite il sistema autonomo deve essere non lineare. Infatti un sistema lineare che ammette una soluzione periodica ne ammette infinite altre vicina ad essa, poichè l'equazione caratteristica del sistema non dipende dalle condizioni iniziali.

Un esempio si ha considerando il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (\text{AQ.31})$$

La soluzione:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

identifica la traiettoria di fase:

$$x^2 + y^2 = 1$$

che rappresenta un ciclo limite. Si può evidenziare il fatto che le altre soluzioni, in prossimità del ciclo, non sono periodiche e tendono asintoticamente al ciclo, passando in coordinate polari e scrivendo l'equazione differenziale per r . Possiamo moltiplicare la prima equazione del sistema (AQ.31) per x e la seconda per y e sommare; otteniamo:

$$x \dot{x} + y \dot{y} = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$$

In termini di:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

abbiamo:

$$r \dot{r} = r^2(1 - r^2)$$

Ovvero, semplificando:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

nella quale il ciclo è rappresentato dall'equazione $r = 1$.

Possiamo allora linearizzare l'equazione per r nell'intorno del ciclo, sviluppando la funzione:

$$\phi(r) = r(1 - r^2)$$

nell'intorno di $r = 1$.

Si ha allora:

$$\phi(r) = -2r + 2 + \mathcal{O}[(r - 1)^2]$$

E quindi l'equazione linearizzata per r :

$$\dot{r} + 2r = 2$$

L'integrale generale della quale è:

$$r(t) = r_0 e^{-2t} + 1$$

che rappresenta una soluzione non periodica. Poichè si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 1$$

il ciclo è stabile.

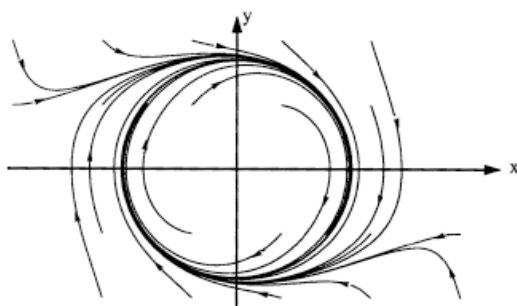


Figura AQ. 35: ciclo limite stabile

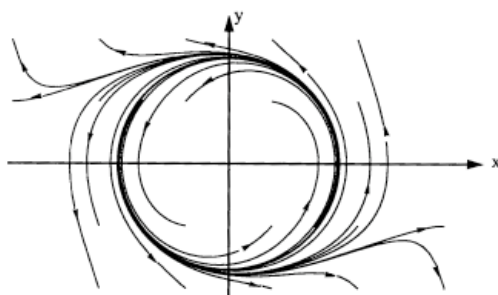


Figura AQ. 36: ciclo limite instabile

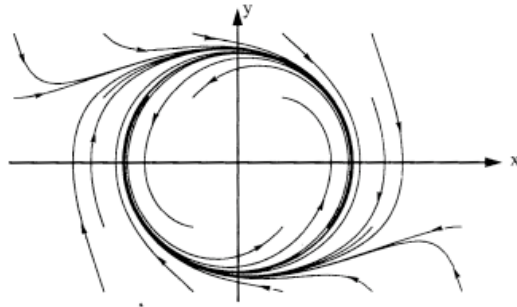


Figura AQ. 37: ciclo limite semistabile

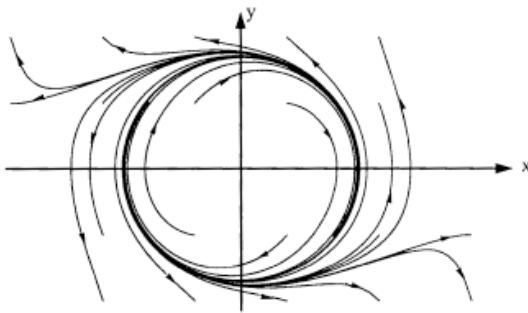


Figura AQ. 38: ciclo limite semistabile

Un esempio classico di ciclo limite in un sistema autonomo è dato dall'equazione di Van der Pol, nata nell'ambito dell'elettronica:

$$\ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (\text{AQ.32})$$

che rappresenta un oscillatore con il coefficiente di resistenza variabile in funzione del campo.

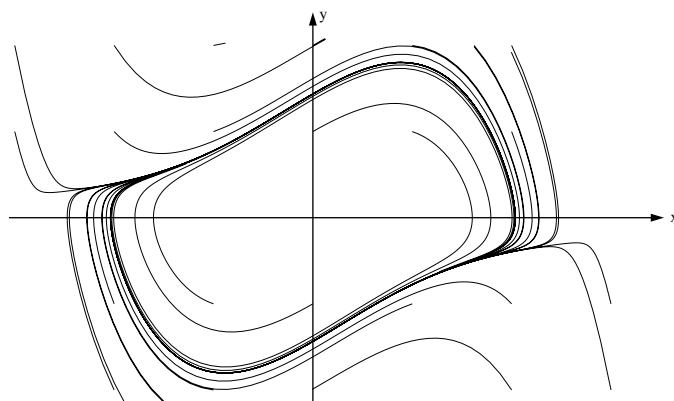


Figura AQ. 39: ciclo limite di Van der Pol

Anche i sistemi non autonomi possono generare dei cicli limite, e questo può accadere anche se il sistema è lineare, come nel caso della risonanza dell'oscillatore forzato: la frequenza forzante tende a stabilizzare il moto su una soluzione periodica isolata di frequenza pari alla frequenza forzante; i transienti smorzandosi asintoticamente comportano che ogni soluzione tenda al ciclo limite che rappresenta una soluzione asintoticamente stabile.