

SO. Stabilità e piccole oscillazioni

L'argomento della stabilità, nato nell'ambito della meccanica, ai fini di fornire dei criteri matematici per formalizzare la nozione intuitiva di stabilità di una configurazione di equilibrio, è divenuto, ormai da tempo, un capitolo della teoria delle equazioni differenziali. Si parla allora di stabilità di una soluzione di un sistema differenziale. Facciamo qualche premessa a questo proposito per passare poi alle applicazioni che riguardano la meccanica.

Criterio di stabilità di Ljapunov

E' dato un sistema differenziale di equazioni del primo ordine:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t) \quad (\text{SO.1})$$

Si suppone che:

$$\mathbf{f} : A \times R \longrightarrow R^n, \quad A \subseteq R^n$$

sia lipschitziana, in modo che, assegnate le condizioni iniziali $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ esista un'unica soluzione (integrale particolare). Allora si dà il seguente criterio di stabilità di Ljapunov.

Una soluzione particolare $\hat{\mathbf{u}}(t)$ del sistema (SO.1), relativa alle condizioni iniziali $\hat{\mathbf{u}}(0) = \hat{\mathbf{u}}_0$, si dice stabile se per ogni $\varepsilon \in R^+$ esiste un $\delta(\varepsilon) \in R^+$, tale che qualunque soluzione $\mathbf{u}(t)$ le cui condizioni iniziali $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ cadono nella sfera di centro $\hat{\mathbf{u}}$ e raggio $\delta(\varepsilon)$, cade in ogni istante successivo a quello iniziale, nella sfera di centro $\hat{\mathbf{u}}(t)$ e raggio ε

In formula questo si traduce nella condizione:

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta(\varepsilon) \in R^+ : \quad (SO.2)$$

$$\|\mathbf{u}_0 - \hat{\mathbf{u}}_0\| < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad \|\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{u}}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0$$

Ciò significa che modificando di poco le condizioni iniziali viene modificata di poco anche la soluzione.

Considereremo *instabile* ogni soluzione che non soddisfa questo criterio.

Stabilità asintotica

Diremo poi che una soluzione è *asintoticamente stabile* se è verificata la condizione:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{u}}(t)\| = 0 \quad (SO.3)$$

Ciò significa che la soluzione modificata tende asintoticamente a alla soluzione stabile. Si noti come quest'ultima è una condizione più forte della (SO.2).

Stabilità dell'equilibrio

Se il sistema (SO.1) ammette la soluzione statica:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}^*, \quad \forall t \geq 0$$

e quindi risulta, di conseguenza, verificata la condizione di equilibrio:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}^*, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

si dice che \mathbf{u}^* rappresenta un punto di equilibrio per il sistema. Se tale soluzione risulta stabile nel senso appena definito, cioè si ha:

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta(\varepsilon) \in R^+ : \quad (SO.4)$$

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}^*\| < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0$$

si parla di *equilibrio stabile*. In particolare se:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\| = 0 \quad (SO.5)$$

l'equilibrio si dice *asintoticamente stabile*.

Stabilità dell'equilibrio di un sistema meccanico

A noi interessa qui specializzare i criteri di stabilità introdotti, ai fini dello studio della stabilità dell'equilibrio di un *sistema olonomo a vincoli lisci* e N gradi di libertà.

Le equazioni differenziali che governano un sistema di questo tipo possono essere scritte sotto forma di equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$

e ricondotte ad un sistema di equazioni del primo ordine del tipo:

$$\begin{cases} \dot{q}_h = v_h \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \end{cases}$$

Questo sistema si può portare, come abbiamo visto, nella forma normale (SO.1). Le incognite sono rappresentate dal vettore a $2N$ componenti:

$$\mathbf{u} \equiv (q_h, v_h)$$

che appartiene allo *spazio degli stati* del sistema, che denotiamo con \mathcal{U} , di cui lo spazio delle configurazioni \mathcal{C} , al quale appartengono i vettori $\mathbf{q} \equiv (q_h)$, e lo spazio delle velocità \mathcal{V} , al quale appartengono i vettori $\mathbf{v} \equiv (v_h)$, rappresentano dei sottospazi. Denotata con $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ la norma nello spazio degli stati del sistema, possiamo caratterizzare le norme nei sottospazi \mathcal{C} e \mathcal{V} nel modo seguente:

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathcal{C}} = \|(q_h, 0)\|_{\mathcal{U}}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} = \alpha \|(0, v_h)\|_{\mathcal{U}}$$

essendo α un fattore positivo inserito per evidenziare la differenza di dimensioni delle velocità rispetto alle posizioni. Data una configurazione di equilibrio del sistema meccanico:

$$\mathbf{u}^* \equiv (q_h^*, 0)$$

la condizione di stabilità dell'equilibrio (SO.4) si traduce allora nella seguente condizione di stabilità di Dirichlet:

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' \in R^+ \exists \delta(\varepsilon, \varepsilon'), \delta'(\varepsilon, \varepsilon') \in R^+ :$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}^*\|_{\mathcal{C}} < \delta(\varepsilon, \varepsilon') \\ \|\mathbf{v}_0\|_{\mathcal{V}} < \delta'(\varepsilon, \varepsilon') \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*\|_{\mathcal{C}} < \varepsilon \\ \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon' \end{array} \right. \quad \forall t > 0$$

(SO.6)

che si deduce tenendo conto del fatto che:

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathcal{C}} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}$$

Teorema di Ljapunov

Uno stato di equilibrio \mathbf{u}^* di un sistema differenziale:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$$

è stabile se esiste una funzione $\varphi(\mathbf{u})$, detta *funzione di Ljapunov*, differenziabile in un intorno $I(\mathbf{u}^*)$, tale che:

i) $\varphi(\mathbf{u})$ ha un minimo relativo stretto in \mathbf{u}^* , cioè:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in I(\mathbf{u}^*) & \implies & \varphi(\mathbf{u}) \geq \varphi(\mathbf{u}^*) \\ \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}^*) & \iff & \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \end{cases}$$

ii) In corrispondenza di ogni integrale particolare $\mathbf{u}(t)$ le cui condizioni iniziali \mathbf{u}_0 cadono nell'intorno $I(\mathbf{u}^*)$, la funzione $\varphi(\mathbf{u}(t))$ risulta monotona non crescente, cioè:

$$\frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{u}(t)) = \nabla_{\mathbf{u}} \varphi \times \dot{\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{u}} \varphi \times \mathbf{f} \leq 0, \quad \forall t > 0$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\varphi(\mathbf{u})$ nell'intorno del punto di equilibrio \mathbf{u}^* :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}) &= \varphi(\mathbf{u}^*) + \underbrace{\nabla_{\mathbf{u}} \varphi(\mathbf{u}^*) \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)}_{= 0} + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \times [(\nabla_{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{u}}) \varphi(\mathbf{u}^*)](\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \mathcal{O}(3), \end{aligned}$$

dove:

$$(\nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{u}) \varphi(\mathbf{u}^*) = \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{u}^*) \right\| = \underline{H}^*,$$

è la matrice hessiana di $\varphi(\mathbf{u})$ calcolata nel punto di equilibrio \mathbf{u}^* .

Il termine del primo ordine è nullo nel punto di minimo.

Per cui rimane:

$$\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \times \underline{H}^* (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \mathcal{O}(3). \quad (\text{SO.7})$$

Possiamo esprimere, in coordinate polari ipersferiche:

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^* = r \mathbf{e}, \quad r = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^*}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|}. \quad (\text{SO.8})$$

E quindi ottenere:

$$\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{e} \times \underline{H}^* \mathbf{e}) r^2 + \mathcal{O}(3). \quad (\text{SO.9})$$

Ma:

$$\mathbf{e} \times \underline{H}^* \mathbf{e} = \underline{H}_{rr}^* = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*), \quad (\text{SO.10})$$

non è altro che l'elemento della matrice hessiana relativo alla coordinata polare r , il cui asse è identificato dal versore \mathbf{e} .

Infatti la derivata direzionale lungo \mathbf{e} non è altro che la derivata parziale rispetto ad r :

$$\mathbf{e} \times \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Per cui possiamo riscrivere:

$$\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*) \right] r^2 + \mathcal{O}(3). \quad (\text{SO.11})$$

In particolare la relazione precedente vale per un integrale particolare del moto e per la sua condizione iniziale:

$$\varphi(\mathbf{u}(t)) - \varphi(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*) \right] r(t)^2, \quad (\text{SO.12})$$

$$\varphi(\mathbf{u}_0) - \varphi(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*) \right] r_0^2. \quad (\text{SO.13})$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni precedenti, otteniamo:

$$\varphi(\mathbf{u}(t)) - \varphi(\mathbf{u}_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*) \right] [r(t)^2 - r_0^2]. \quad (\text{SO.14})$$

Ovvero:

$$\varphi(\mathbf{u}(t)) - \varphi(\mathbf{u}_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*) \right] [r(t) + r_0][r(t) - r_0] \leq 0. \quad (\text{SO.15})$$

Ora dobbiamo tenere conto che:

i) $\varphi(\mathbf{u})$ ha un minimo relativo stretto in \mathbf{u}^* , per cui:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*) > 0,$$

ii) $\varphi(\mathbf{u}(t))$ è una funzione non crescente di t durante il moto, per cui:

$$\varphi(\mathbf{u}(t)) - \varphi(\mathbf{u}_0) \leq 0,$$

Da cui segue:

$$r(t) - r_0 \leq 0.$$

Se si sceglie la condizione iniziale in modo che:

$$r_0 < \delta(\varepsilon) = \varepsilon,$$

abbiamo subito:

$$r(t) \leq r_0 < \delta(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

E quindi la stabilità dell'equilibrio.

Infatti abbiamo la seguente situazione per i segni dei termini che compaiono nell'equazione (SO.15):

$$\underbrace{\varphi(\mathbf{u}(t)) - \varphi(\mathbf{u}_0)}_{\leq 0} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(\mathbf{u}^*) \right]}_{> 0} \underbrace{[r(t) + r_0]}_{\geq 0} \underbrace{[r(t) - r_0]}_{\leq 0} \leq 0.$$

Da cui la condizione di stabilità.

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}^*\| < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\| \leq r_0 < \varepsilon, \quad \forall t > 0$$

per ogni condizione iniziale appartenente ad un intorno di raggio $\delta(\varepsilon)$ racchiuso dall'ipersuperficie.

Teorema di Dirichlet

Applichiamo il teorema di Ljapunov allo studio della stabilità nel caso di un sistema meccanico soggetto a forze conservative. Si dimostra in questo caso il teorema di Dirichlet.

Se un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, è soggetto a sole forze conservative e il potenziale presenta un massimo relativo stretto in una configurazione di equilibrio ordinaria \mathbf{q}^ allora questa è una configurazione di equilibrio stabile*

DIMOSTRAZIONE

In questo caso esiste una funzione di Ljapunov rappresentata dall'energia meccanica del sistema:

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$$

L'equilibrio è caratterizzato da $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Osserviamo che l'energia cinetica, che è sempre positiva o nulla, all'equilibrio è nulla essendo nullo $\dot{\mathbf{q}}$. Inoltre il potenziale è massimo, di conseguenza $V = -U$ è minima. Infatti fuori dall'equilibrio l'energia meccanica viene incrementata, rispetto a $-U$, dall'energia cinetica che è positiva. Dunque l'energia meccanica è minima all'equilibrio e vale:

$$E_{equil.} = -U(\mathbf{q}^*)$$

E' così verificata la prima proprietà che definisce una funzione di Ljapunov. Anche la seconda proprietà è verificata, in quanto l'energia meccanica, in presenza di forze conservative è un integrale primo del moto, per cui si ha:

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = 0$$

Notiamo che la seconda proprietà è soddisfatta come uguaglianza.

Di conseguenza la configurazione di equilibrio \mathbf{q}^* è stabile.

- Il teorema si estende facilmente anche al caso in cui, oltre alle forze conservative, sono presenti delle forze dissipative, perchè in questo caso l'energia meccanica è sempre una funzione di Ljapunov, in quanto ha ancora un minimo per $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, $\dot{\mathbf{q}} = 0$, cioè all'equilibrio; ma non è più un integrale primo del moto. Tuttavia, dal momento che il lavoro delle forze dissipative, per definizione, è non positivo, il bilancio dell'energia comporta:

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = W_{dissip.} \leq 0$$

Dunque l'energia meccanica è una funzione di Ljapunov e l'equilibrio è stabile.

Studio del potenziale nelle configurazioni di equilibrio

E' importante osservare che il teorema di Dirichlet consente di ricondurre l'analisi dinamica della stabilità dell'equilibrio di un sistema soggetto a forze conservative (ed eventualmente anche dissipative) alla ricerca dei punti di massimo della funzione potenziale, che viene analizzata nelle configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema, senza coinvolgere lo studio del moto. Il

problema della stabilità viene allora ricondotto da un problema dinamico ad un problema statico.

Sviluppando il potenziale in serie di Taylor nell'intorno della configurazione di equilibrio, possiamo scrivere:

$$U(q_\ell) = U(q_\ell^*) + \left[\frac{\partial U}{\partial q_h} (q_\ell) \right] (q_h - q_h^*) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} (q_\ell^*) \right] (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*) + \mathcal{O}(3)$$

Si può rendere più compatta la scrittura precedente facendo uso della notazione simbolica in luogo di quella indiciale. Si ha allora:

$$U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}^*) + \nabla_{\mathbf{q}} U(\mathbf{q}^*) \times (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \times \underline{H}(\mathbf{q}^*) (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \mathcal{O}(3)$$

dove:

$$\underline{H}(\mathbf{q}) \equiv \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(\mathbf{q}) \right\|$$

è la matrice hessiana del potenziale.

Richiedere che la configurazione di equilibrio rappresenti un punto di massimo per il potenziale, come è noto dall'analisi, comporta come condizione necessaria, che sia nullo il gradiente del potenziale:

$$\mathbf{Q}^* = \nabla_{\mathbf{q}} U(\mathbf{q}^*) = 0$$

condizione che, per il principio dei lavori virtuali, in presenza di vincoli lisci, equivale a richiedere che la configurazione ordinaria \mathbf{q}^* sia una configurazione di equilibrio.

Rimane allora:

$$U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{q}^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \times \underline{H}^* (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \mathcal{O}(3) < 0, \quad \mathbf{q} \neq \mathbf{q}^*$$

E la condizione di massimo relativo stretto del potenziale, se si trascurano i contributi di ordine superiore al secondo, per incrementi piccoli dei parametri lagrangiani, equivale alla richiesta che la matrice hessiana:

$$\underline{H}^* = \underline{H}(\mathbf{q}^*)$$

sia definita negativa. Notiamo che qualora, invece, la matrice risulti definita positiva il potenziale possiede un minimo relativo, mentre i punti in cui la matrice hessiana non è definita di segno, essendo non singolare, sono punti di sella del potenziale. Dal punto di vista meccanico consideriamo entrambe queste possibilità come configurazioni di equilibrio instabili.

Lo studio del comportamento della matrice hessiana può essere condotto con i metodi noti dall'analisi, come lo studio dei segni degli autovalori, metodo conveniente soprattutto se la matrice si presenta in forma diagonale, oppure con il metodo di Sylvester che risulta maggiormente conveniente se la matrice non si presenta in forma diagonale.

Piccole oscillazioni

Quando sussiste la condizione di stabilità è sempre possibile approssimare le equazioni del moto di Lagrange di un sistema olonomo, a *vincoli indipendenti dal tempo* e soggetto a *forze conservative*, — equazioni che in genere non sono lineari— *linearizzandole* nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile del sistema. Le equazioni così approssimate hanno il vantaggio di essere integrabili analiticamente e di fornire informazioni

sull'andamento del moto nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile.

Procediamo in tre passi:

- determinazione della lagrangiana approssimata;
- determinazione delle *equazioni linearizzate* del moto;
- integrazione delle equazioni linearizzate e determinazione delle *frequenze proprie* delle piccole oscillazioni del sistema nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile.

Lagrangiana approssimata

L'approssimazione lineare delle equazioni del moto si può ottenere approssimando la lagrangiana ad una *forma quadratica* rispetto ai parametri lagrangiani e alle loro derivate, in modo che le derivate della lagrangiana rispetto a queste variabili, che compaiono nelle equazioni del moto, siano lineari. Ci occorrono allora, gli sviluppi in serie di Taylor del potenziale e dell'energia cinetica i quali devono essere troncati al secondo ordine.

Consideriamo il potenziale che, nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile $\mathbf{q}^* \equiv (q_\ell^*)$, si sviluppa nel modo seguente:

$$U(q_\ell) = U(q_\ell^*) + \left[\frac{\partial U}{\partial q_h} (q_\ell^*) \right] (q_h - q_h^*) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} (q_\ell^*) \right] (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*) + \mathcal{O}(3)$$

Sottolineiamo ancora il fatto che grazie alla stabilità della configurazione di equilibrio, se assumiamo:

$$\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}^*\| < \delta(\varepsilon, \varepsilon')$$

e all'istante iniziale trascuriamo i termini di ordine superiore al secondo, essi risulteranno limitati allo stesso modo e quindi trascurabili anche in tutti gli istanti successivi.

Teniamo, inoltre, conto del fatto che all'equilibrio, in una configurazione ordinaria, le derivate prime del potenziale sono nulle; possiamo poi definire lo zero del potenziale in modo che la costante $U(q_\ell^*)$ sia nulla; in ogni caso una costante additiva non è rilevante, in quanto la lagrangiana dovrà essere poi derivata e le costanti additive quindi non contribuiscono.

E' comodo, infine, alleggerire ulteriormente la scrittura introducendo le *coordinate relative* alla configurazione di equilibrio:

$$\mathbf{z} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^* \quad \Longleftrightarrow \quad z_h = q_h - q_h^*$$

Il potenziale approssimato al secondo ordine si scriverà allora:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} H_{hk}^* z_h z_k$$

dove H_{hk}^* sono gli elementi della matrice hessiana calcolata nella configurazione di equilibrio.

Per quanto riguarda l'approssimazione dell'energia cinetica, poichè i vincoli sono supposti indipendenti dal tempo, possiamo scrivere l'energia cinetica nella forma:

$$T = \frac{1}{2} a_{hk}(q_\ell) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

La funzione da sviluppare in serie qui è la $a_{hk}(q_\ell)$:

$$a_{hk}(q_\ell) = a_{hk}(q_\ell^*) + \left[\frac{\partial a_{hk}}{\partial q_h}(q_\ell^*) \right] (q_h - q_h^*) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial q_h \partial q_k}(q_\ell^*) \right] (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*) + \mathcal{O}(3)$$

Bisogna fare attenzione, però, al fatto che T si presenta già come una forma quadratica e quindi lo sviluppo di $a_{hk}(q_\ell)$ deve essere arrestato all'ordine zero, altrimenti si ottengono in T potenze di ordine superiore al secondo. Si ha allora l'energia cinetica approssimata a forma quadratica:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} a_{hk}^* \dot{z}_h \dot{z}_k$$

nella quale abbiamo denotato:

$$a_{hk}^* = a_{hk}(q_\ell^*)$$

e abbiamo introdotto le coordinate relative, tenendo conto che risulta $\dot{z}_h = \dot{q}_h$.

Abbiamo allora la lagrangiana approssimata a forma quadratica:

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{T} + \bar{U} = \frac{1}{2} a_{hk}^* \dot{z}_h \dot{z}_k + \frac{1}{2} H_{hk}^* z_h z_k$$

Equazioni linearizzate

Le equazioni di Lagrange approssimate si scrivono di conseguenza:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}_j} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial z_j} = 0$$

Abbiamo:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}_j} = \frac{1}{2} a_{hk}^* \delta_{jh} \dot{z}_k + \frac{1}{2} a_{hk}^* \dot{z}_h \delta_{jk} = a_{jk}^* \dot{z}_k$$

grazie alla simmetria della matrice dell'energia cinetica. Analogamente:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial z_j} = \frac{1}{2} H_{hk}^* \delta_{jh} z_k + \frac{1}{2} H_{hk}^* z_h \delta_{jk} = H_{jk}^* z_k$$

Seguono le equazioni linearizzate del moto:

$$a_{jk}^* \ddot{z}_k - H_{jk}^* z_k = 0$$

Equazioni che possiamo riscrivere in forma simbolica:

$$\underline{a}^* \ddot{\underline{z}} - \underline{H}^* \underline{z} = 0 \quad (\text{SO.16})$$

Frequenze proprie di oscillazione

Le equazioni linearizzate nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile, dal punto di vista analitico, rappresentano un sistema differenziale di ordine $2N$, lineare, omogeneo, a coefficienti costanti. Di conseguenza il suo integrale generale è dato da una combinazione lineare di $2N$ integrali particolari indipendenti. Per determinare gli integrali particolari utilizziamo una funzione test esponenziale del tipo:

$$\underline{z}_{test} = \underline{d} e^{\lambda t}$$

con λ costante e \mathbf{d} vettore costante. Derivando due volte rispetto al tempo otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \lambda^2 \mathbf{d} e^{\lambda t}$$

Quindi sostituendo nel sistema (SO.16) abbiamo:

$$\underline{a}^* \mathbf{d} \lambda^2 e^{\lambda t} - \underline{H}^* \mathbf{d} e^{\lambda t} = 0$$

Tenendo conto che l'esponenziale è sempre non nullo, e raccogliendo il vettore \mathbf{d} , otteniamo la condizione a cui devono soddisfare λ e \mathbf{d} affinché la funzione test sia soluzione:

$$(\underline{H}^* - \lambda^2 \underline{a}^*) \mathbf{d} = 0 \quad (\text{SO.17})$$

Questo rappresenta un problema agli autovalori. L'annullarsi del determinante dei coefficienti del sistema algebrico omogeneo, le cui incognite sono gli autovettori, fornisce la condizione che determina gli autovalori:

$$\det(\underline{H}^* - \lambda^2 \underline{a}^*) = 0 \quad (\text{SO.18})$$

Abbiamo, così ottenuto l'equazione caratteristica del sistema differenziale (SO.16), che è un'equazione di grado N per λ^2 , quindi di grado $2N$ per λ , che determina $2N$ valori di λ e ci consente di ottenere $2N$ integrali particolari del moto. Se, per esempio $N = 2$ l'equazione risulterà biquadratica.

Possiamo ottenere delle informazioni sul segno di λ^2 riscrivendo la (SO.17) nella forma:

$$\underline{H}^* \mathbf{d} = \lambda^2 \underline{a}^* \mathbf{d}$$

e prendendo il prodotto scalare per \mathbf{d} in modo da poter risolvere per λ^2 :

$$\lambda^2 = - \frac{\mathbf{d} \times \underline{H}^* \mathbf{d}}{\mathbf{d} \times \underline{a}^* \mathbf{d}}$$

Notiamo che il denominatore non si annulla essendo la matrice dell'energia cinetica definita positiva, inoltre il numeratore è negativo in conseguenza della stabilità dell'equilibrio che richiede che la matrice hessiana del potenziale sia definita negativa. Dunque $\lambda^2 < 0$. Gli autovalori sono immaginari e si possono esprimere introducendo le quantità reali ω tali che:

$$\omega^2 = -\lambda^2 > 0$$

Allora l'equazione caratteristica si può riscrivere, in termini delle ω , nella forma:

$$\det(\underline{H}^* + \omega^2 \underline{a}^*) = 0 \quad (\text{SO.19})$$

Gli integrali particolari sono delle funzioni oscillanti di cui le quantità ω rappresentano le frequenze di oscillazione. Ad ogni frequenza corrispondono due integrali particolari corrispondenti a $\lambda = \pm i\omega$, e allo stesso autovettore relativo all'autovalore λ^2 , essendo le ω per definizione positive. Si ha allora l'integrale generale delle equazioni linearizzate:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{d}_h \left(c_h^{(+)} e^{i\omega^{(h)}t} + c_h^{(-)} e^{-i\omega^{(h)}t} \right)$$

essendo $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(N)}$ le N le frequenze proprie di oscillazione, radici dell'equazione caratteristica (SO.19) e con la somma su h da 1 ad N sottintesa come al solito. La frequenza più bassa prende il nome di *frequenza fondamentale* di oscillazione.

Coordinate normali

Poniamo di rappresentare il vettore \mathbf{z} sulla base degli autovettori \mathbf{d}_k relativi al problema agli autovalori (SO.17) Abbiamo:

$$\mathbf{z} = Z_k \mathbf{d}_k \quad (\text{SO.20})$$

Sostituendo nel sistema differenziale (SO.16) otteniamo:

$$\underline{a}^* (\ddot{Z}_k \mathbf{d}_k) - \underline{H}^* (Z_k \mathbf{d}_k) = 0$$

Tenendo conto che per la (SO.19) si ha:

$$\underline{H}^* \mathbf{d}_k = -(\omega^{(k)})^2 \underline{a}^* \mathbf{d}_k$$

segue moltiplicando scalarmente per \mathbf{d}_h :

$$\left[\ddot{Z}_k + (\omega^{(k)})^2 Z_k \right] \mathbf{d}_h \times \underline{a}^* \mathbf{d}_k = 0$$

Come è noto il problema agli autovalori, essendo \underline{H}^* simmetrica e \underline{a}^* simmetrica e definita positiva, ammette una base di autovettori tali che:

$$\mathbf{d}_h \times \underline{a}^* \mathbf{d}_k = \delta_{hk}$$

Di conseguenza rimane:

$$\ddot{Z}_h + (\omega^{(h)})^2 Z_h = 0 \quad (\text{SO.21})$$

Rispetto alle coordinate Z_h il sistema delle equazioni linearizzate del moto (SO.21) si presenta come un sistema di N moti armonici disaccoppiati, relativi a ciascuna delle frequenze proprie di oscillazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{Z}_1 + (\omega^{(1)})^2 Z_1 = 0 \\ \ddot{Z}_2 + (\omega^{(2)})^2 Z_2 = 0 \\ \dots \quad \dots \\ \ddot{Z}_N + (\omega^{(N)})^2 Z_N = 0 \end{array} \right.$$

Le coordinate Z_h così definite prendono il nome di *coordinate normali* e i rispettivi moti armonici si dicono *modi normali di oscillazione*.

Le coordinate normali si possono esplicitare moltiplicando scalarmente la (SO.20) per $\underline{a}^* \mathbf{d}_h$:

$$\mathbf{z} \times \underline{a}^* \mathbf{d}_h = Z_k \mathbf{d}_k \times \underline{a}^* \mathbf{d}_h$$

Tenendo conto che:

$$\mathbf{d}_h \times \underline{a}^* \mathbf{d}_k = \delta_{hk}$$

si ricava:

$$Z_h = \mathbf{z} \times \underline{a}^* \mathbf{d}_h \quad (\text{SO.22})$$