

EH. Equazioni di Hamilton

Iniziamo questo capitolo con un'osservazione di carattere preliminare. Consideriamo, per esempio, un sistema differenziale costituito da N equazioni ciascuna del secondo ordine, in forma normale:

$$y''_h = f_h(x, y_\ell, y'_\ell), \quad h, \ell = 1, 2, \dots, N$$

Evidentemente è sempre possibile abbassare l'ordine delle equazioni dal secondo al primo, introducendo delle nuove variabili z_h uguali alle derivate prime di y_h . Si ottiene allora un sistema di $2N$ equazioni differenziali, ciascuna del primo ordine, equivalente al sistema da cui siamo partiti:

$$\begin{cases} y'_h = z_h \\ z'_h = f_h(x, y_\ell, z_\ell) \end{cases}$$

Si dice allora, che si è passati da una formulazione del secondo ordine ad una formulazione del primo ordine. Questo metodo, qui illustrato mediante un esempio, è del tutto generale e può essere utilizzato per abbassare di un'unità l'ordine delle equazioni di qualsiasi sistema differenziale dal quale si voglia partire.

- Osserviamo che l'abbassamento dell'ordine delle equazioni che compongono un sistema differenziale richiede l'introduzione di tante nuove variabili quante sono le variabili incognite del sistema di partenza e il raddoppio del numero di equazioni del sistema, per cui nel suo complesso l'ordine del sistema differenziale rimane immutato.

- Non esiste un unico modo di scegliere le nuove variabili per effettuare la riduzione dell'ordine delle equazioni di un sistema. Questo risulta chiaro, in quanto, dopo aver effettuato l'abbassamento dell'ordine delle equazioni

del sistema nel modo indicato, è sempre lecita un'ulteriore trasformazione regolare di variabili, che lascia immutato l'ordine delle equazioni.

Formulazione del primo ordine delle equazioni del moto

Considerando le equazioni del moto di Lagrange, nella forma in cui esiste la lagrangiana, sappiamo che costituiscono un sistema di equazioni differenziali, ciascuna del secondo ordine, riducibile in forma normale, se si fa eccezione di quei casi degeneri in cui la matrice dell'energia cinetica è *semidefinita* positiva. Si dice, allora che la formulazione lagrangiana del problema del moto di una sistema olonomo è una *formulazione del secondo ordine*.

E' possibile passare dalla formulazione del secondo ordine del problema del moto ad una formulazione del primo ordine, introducendo tante nuove variabili quante sono le derivate prime rispetto al tempo dei parametri lagrangiani. Otteniamo così il sistema:

$$\begin{cases} \dot{q}_h = v_h \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \end{cases} \quad (\text{EH.1})$$

Le variabili $(q_h, v_h) \equiv (q_h, \dot{q}_h)$ si dicono *variabili lagrangiane*. Come si è osservato prima, però, la scelta delle variabili non è univoca e si può ottenere un sistema di equazioni differenziali equivalente a quello di partenza, a condizione che l'ulteriore trasformazione di variabili che si effettua, sia regolare. In particolare una scelta di variabili significativa è quella che utilizza, anzichè le variabili lagrangiane, le variabili (q_h, p_h) che vengono dette *variabili hamiltoniane* o *variabili canoniche*, dove le nuove variabili:

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \quad (\text{EH.2})$$

sono dette *momenti coniugati* o *momenti canonici*. Con questa scelta il sistema assume la forma normale. La regolarità della trasformazione:

$$(q_h, v_h) \longrightarrow (q_h, p_h)$$

è garantita dalla non singolarità della matrice jacobiana della trasformazione:

$$\mathcal{J} \equiv \begin{pmatrix} \delta_{hk} & 0 \\ \frac{\partial p_h}{\partial q_k} & \frac{\partial p_h}{\partial v_k} \end{pmatrix}$$

in tutti i punti dello spazio delle variabili (q_h, v_h) . Condizione che è garantita dalla regolarità della trasformazione che coinvolge le sole variabili che vengono modificate:

$$\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{p}$$

che equivale a richiedere che il sistema lagrangiano sia riducibile in forma normale:

$$\det(\mathcal{J}) = \det \left\| \frac{\partial p_h}{\partial v_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v_h \partial v_k} \right\| \neq 0, \quad (\text{EH.3})$$

Notiamo che supposto che il potenziale sia ordinario, oppure che l'eventuale potenziale generalizzato sia lineare in \dot{q} , tale condizione equivale alla non singolarità della matrice dell'energia cinetica in tutti i punti dello spazio degli eventi nei quali la matrice è definita. Ed essendo la matrice dell'energia cinetica definita positiva, questo equivale alla convessità della funzione rispetto alle variabili lagrangiane.

Trasformate di Legendre

Il tipo di trasformazione che ci interessa esaminare è ben nota e prende il nome di *trasformazione di Legendre*.

Essa si può caratterizzare nel modo seguente. Consideriamo una funzione differenziabile:

$$f : A \longrightarrow R, \quad A \subseteq R^N$$

di classe $\mathcal{C}^{(2)}$ almeno. Denotiamo con $\mathbf{x} \equiv (x_h)$ gli elementi di A e definiamo una seconda funzione:

$$g : A \times A \longrightarrow R$$

In maniera tale che:

$$g(x_h, y_h) = x_h y_h - f(x_h) \quad (\text{EH.4})$$

Notiamo che \mathbf{x} e \mathbf{y} sono variabili indipendenti. Per come è stata definita, la g è essa pure differenziabile e della stessa classe della f . Tra tutte le possibili funzioni del tipo g vogliamo indagare se esiste, e a quali condizioni, una funzione g che sia indipendente da \mathbf{x} . Imporre l'indipendenza della g da \mathbf{x} equivale a richiedere che in ogni punto del dominio sia soddisfatta la condizione:

$$\varphi_k(x_h, y_h) = y_k - \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{EH.5})$$

che rappresenta un vincolo per le variabili \mathbf{x}, \mathbf{y} . La funzione

$$g(y_h) = x_h y_h - f(x_h) \quad (\text{EH.6})$$

così caratterizzata prende il nome di *trasformata di Legendre* della f .

Per calcolare le derivate parziali della f rispetto a x_h , e rispettivamente della g rispetto a y_h , le variabili x_h e y_h vanno trattate come variabili condizionate. Questo significa che differenziando entrambi i membri della (EH.6), in forza del vincolo (EH.5) tra le variabili, si ha:

$$dg = d(x_h y_h) - df + \lambda_k d\varphi_k$$

dove sono stati introdotti i moltiplicatori di Lagrange λ_k . Sviluppando si ha:

$$\frac{\partial g}{\partial y_h} dy_h = x_h dy_h + y_h dx_h - \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} dx_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h} dy_h$$

dal momento che la condizione (EH.5) comporta:

$$d\varphi_k = 0$$

Data l'arbitrarietà di dx_h e dy_h seguono le condizioni:

$$\frac{\partial g}{\partial y_h} = x_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} = y_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h}$$

Tenendo conto del vincolo (EH.5) otteniamo i seguenti risultati:

$$\frac{\partial g}{\partial y_h} = x_h, \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} = y_h, \quad \lambda_k = 0$$

a condizione che:

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \right\| = - \det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} \right\| \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in A \quad (\text{EH.7})$$

Essendo tale matrice non singolare non può avere autovalori nulli e quindi $\lambda_k = 0$; diversamente esisterebbe un autovettore associato ad un autovalore nullo. Osserviamo anche che la richiesta che la matrice hessiana della f sia non singolare su tutto il dominio A equivale a richiedere che la forma quadratica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} v_h v_k \neq 0$$

sia non nulla per ogni \mathbf{v} , in ogni punto di A . Ma se tale forma quadratica non si annulla (essendo f di classe $\mathcal{C}^{(2)}$) essa ha lo stesso segno in tutto il dominio A , ad esempio, è sempre positiva; allora la condizione equivale a richiedere che la funzione f sia *convessa* su tutto A . Osserviamo che questa condizione di convessità è anche la condizione che rende legittimo il cambiamento di variabili $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ in tutto il dominio A . Possiamo allora passare dalla formulazione di un problema nelle variabili \mathbf{x} alla formulazione dello stesso problema nelle variabili \mathbf{y} facendo entrare in gioco la trasformata di Legendre g che dipende solo da \mathbf{y} in luogo della f che dipende da \mathbf{x} .

Equazioni di Hamilton

L'applicazione della trasformazione di Legendre:

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{p}$$

al sistema delle equazioni del moto (EH.1) comporta l'introduzione della trasformata di Legendre della lagrangiana:

$$\mathcal{H} = v_h p_h - \mathcal{L} \tag{EH.8}$$

che prende il nome di *funzione di Hamilton* o *hamiltoniana*, la quale dipende da \mathbf{p} invece che da \mathbf{v} , oltre che, naturalmente dalle variabili \mathbf{q} che non vengono coinvolte nella trasformazione, ed eventualmente dal tempo:

$$\mathcal{H}(q_h, p_h, t) = v_h p_h - \mathcal{L}(q_h, v_h, t)$$

Si ha allora, in base ai risultati del paragrafo precedente:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} = v_h, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_h} = p_h \quad (\text{EH.9})$$

Dobbiamo poi tenere conto che le funzioni \mathcal{H} e \mathcal{L} dipendono anche da \mathbf{q} , t e quindi, grazie alla (EH.8) si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (\text{EH.10})$$

Introducendo i risultati (EH.9) e (EH.10) nel sistema di equazioni del primo ordine (EH.1) otteniamo le *equazioni di Hamilton* o *equazioni canoniche*:

$$\boxed{\dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}, \quad \dot{p}_h = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}} \quad (\text{EH.11})$$

- Osserviamo che l'equivalenza tra la formulazione lagrangiana e la formulazione hamiltoniana delle equazioni del moto, è garantita a condizione che il sistema delle equazioni del moto dal quale si parte sia riducibile in forma normale. Per sistemi non riducibili in forma normale le due formulazioni non si equivalgono, per cui possono esistere sistemi meccanici che ammettono la trattazione lagrangiana e non quella hamiltoniana o viceversa.

Integrale generale e integrali particolari del moto

Si estendono, come al solito, anche per le equazioni di Hamilton i concetti di *integrale generale del moto* e di *integrale particolare del moto*.

— Si dice *integrale generale del moto* l'integrale generale del sistema delle equazioni canoniche, cioè la *famiglia delle* ∞^{2N} *soluzioni del sistema* (EH.11), caratterizzata da $2N$ costanti, tante quanto è l'ordine del sistema differenziale. L'integrale generale si può rappresentare come:

$$\begin{cases} q_h = q_h(t, c_1, c_2, \dots, c_{2N}) \\ p_h = p_h(t, c_1, c_2, \dots, c_{2N}) \end{cases} \quad (\text{EH.12})$$

— Si dice *integrale particolare del moto* un integrale particolare del sistema differenziale delle equazioni canoniche, cioè una delle soluzioni che si ottiene assegnando un valore particolare a ciascuna delle $2N$ costanti c_1, c_2, \dots, c_{2N} , ovvero assegnando le condizioni iniziali per le variabili canoniche q_h, p_h .

Integrale primo del moto

Una funzione:

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N, t)$$

si dice *integrale primo del moto* quando, sostituendo in essa alle variabili q_h, p_h le funzioni $q_h(t), p_h(t)$ che rappresentano un integrale particolare del moto, la funzione ψ assume un valore costante nel tempo:

$$\psi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t), t) = C, \quad \forall t$$

Il valore della costante può essere calcolato facilmente utilizzando le condizioni iniziali, grazie al fatto che ψ mantiene in ogni istante il valore iniziale.

Coordinate cicliche o ignorabili

Una coordinata canonica $q_{\bar{h}}$ si dice *coordinata ciclica* o *ignorabile*, per un sistema governato dall'hamiltoniana \mathcal{H} , se non compare nell'hamiltoniana, ma compare solamente il suo momento coniugato $p_{\bar{h}}$. Di conseguenza dalle equazioni di Hamilton si ottiene:

$$\dot{p}_{\bar{h}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_{\bar{h}} = \text{costante}$$

Ad ogni coordinata ciclica viene quindi a corrispondere un integrale primo del moto.

- Notiamo che se una coordinata $q_{\bar{h}}$ è ciclica per la lagrangiana, essa risulta ciclica anche per l'hamiltoniana e viceversa.

Infatti si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\bar{h}}} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}} = 0$$

Parentesi di Poisson e integrali primi del moto

Consideriamo una funzione differenziabile delle variabili canoniche ed eventualmente del tempo:

$$\psi = \psi(q_\ell, p_\ell, t)$$

E ci domandiamo a quali condizioni questa funzione può essere un integrale primo del moto. A questo scopo dobbiamo richiedere che:

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell, t) = \frac{\partial\psi}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial\psi}{\partial p_h} \dot{p}_h + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

Eliminando \dot{q}_h, \dot{p}_h mediante le equazioni di Hamilton ricaviamo:

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell, t) = \frac{\partial\psi}{\partial q_h} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_h} - \frac{\partial\psi}{\partial p_h} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_h} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

Introducendo le *parentesi di Poisson* definite, per ogni coppia di funzioni differenziabili delle variabili hamiltoniane f, g ed eventualmente del tempo, come:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \quad (\text{EH.13})$$

si può riscrivere:

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell, t) = [\psi, \mathcal{H}] + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

• Osserviamo, in particolare, che quando la funzione ψ non dipende esplicitamente dal tempo, cioè si ha:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

la condizione affinché una funzione delle sole variabili canoniche sia un integrale primo del moto si riduce a richiedere che si annulli la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana:

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell) = [\psi, \mathcal{H}] = 0$$

• Si osserva ancora che qualora la funzione ψ sia l'hamiltoniana stessa si ha:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = [\mathcal{H}, \mathcal{H}] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

L'hamiltoniana, dunque, risulta essere un integrale primo del moto se e solo se non dipende esplicitamente dal tempo. Grazie alla seconda delle (EH.10) sappiamo che questo equivale a richiedere che la lagrangiana non dipenda esplicitamente del tempo.

Facendo uso delle parentesi di Poisson è possibile riscrivere in una nuova forma le equazioni canoniche. Si ha infatti:

$$\begin{cases} \dot{q}_h = [q_h, \mathcal{H}] \\ \dot{p}_h = [p_h, \mathcal{H}] \end{cases} \quad (\text{EH.14})$$

Questa forma ha il vantaggio di eliminare il segno negativo, dando un aspetto simmetrico alle equazioni.

Hamiltoniana

L'hamiltoniana è stata definita come trasformata di Legendre della lagrangiana mediante la (EH.8) che possiamo riscrivere in termini delle usuali notazioni:

$$\mathcal{H} = \dot{q}_h p_h - \mathcal{L}$$

essendo:

$$\mathcal{L} = T + U$$

Per calcolare esplicitamente l'espressione di \mathcal{H} ricordiamo che l'energia cinetica di un sistema olonomo si può scrivere nella forma:

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

dove:

$$T_0 = d, \quad T_1 = b_h \dot{q}_h, \quad T_2 = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

E il potenziale (generalizzato) si può scrivere:

$$U = U_0 + U_1, \quad U_0 = g, \quad U_1 = f_h \dot{q}_h$$

Allora abbiamo:

$$p_h = a_{hk} \dot{q}_k + b_h + f_h$$

Quindi:

$$\dot{q}_h p_h = a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + b_h \dot{q}_h + f_h \dot{q}_h = 2T_2 + T_1 + U_1$$

Segue:

$$\mathcal{H} = T_2 - T_0 - U_0 \tag{EH.15}$$

A questo stesso risultato si può giungere anche facendo uso della formula di Eulero per le funzioni omogenee di grado n :

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f \tag{EH.16}$$

essendo $f = f(x_i)$ una funzione omogenea, a valori reali, di grado n delle variabili x_i .

Nel nostro caso le funzioni T_2, T_1, T_0 sono omogenee nelle variabili \dot{q}_h di gradi rispettivi 2, 1, 0, e le funzioni U_1, U_0 sono funzioni omogenee delle stesse variabili di gradi rispettivi 1, 0. Di conseguenza si ottiene:

$$\dot{q}_h p_h = \dot{q}_h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = 2T_2 + T_1 + U_1$$

E quindi:

$$\mathcal{H} = \dot{q}_h p_h - \mathcal{L} = 2T_2 + T_1 + U_1 - (T_2 + T_1 + T_0 + U_1 + U_0) = T_2 - T_0 - U_0$$

Quando i vincoli sono *indipendenti dal tempo*, come è stato evidenziato nel capitolo relativo alla cinematica delle masse, abbiamo che:

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0 \quad \implies \quad T = T_2$$

Di conseguenza l'espressione dell'hamiltoniana si specializza come:

$$\mathcal{H} = T - U_0 \quad (\text{EH.17})$$

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato:

- Quando i vincoli sono indipendenti dal tempo e il potenziale è ordinario, cioè le forze sono conservative, l'hamiltoniana coincide con l'energia meccanica del sistema ed è un integrale primo del moto.

Infatti se il potenziale è ordinario si ha $U = U_0$ e la (EH.17) diviene:

$$\mathcal{H} = T - U = T + V = E \quad (\text{EH.18})$$

Inoltre, essendo i vincoli indipendenti dal tempo, sia T che U non dipendono dal tempo, perciò \mathcal{H} non dipende esplicitamente dal tempo ed è quindi un integrale primo del moto, che coincide con l'integrale primo dell'energia. L'hamiltoniana viene perciò considerata come una funzione che generalizza il concetto di energia meccanica.

Formulazione mista: funzione di Routh

Si chiama funzione di Routh la trasformata di Legendre ridotta alle prime M , con $M < N$ variabili:

$$\mathcal{R} = \sum_{h=1}^M \dot{q}_h p_h - \mathcal{L} \quad (\text{EH.19})$$

Una simile funzione si comporta come un'hamiltoniana rispetto alle prime M coordinate generalizzate q_h e come una lagrangiana rispetto alle restanti $N - M$ coordinate. Essa viene a dipendere, infatti dalle variabili nel modo seguente:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_M, \dot{q}_{M+1}, \dot{q}_{M+2}, \dots, \dot{q}_N, t)$$

Le equazioni del moto del sistema sono allora date da un sistema misto di equazioni di Hamilton e di equazioni di Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_h}, \quad h = 1, 2, \dots, M \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_h} = 0, \quad h = M + 1, M + 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (\text{EH.20})$$

Un formulazione mista di questo tipo può essere particolarmente conveniente quando le prime M variabili sono cicliche, perchè, in questo caso i primi M momenti coniugati sono già determinati, in quanto sono integrali primi del moto e la funzione di Routh viene a dipendere, durante il moto, da M costanti e solo dalle ultime $N - M$ coordinate lagrangiane, dalle loro derivate prime e dal tempo, come se il problema avesse $N - M$ gradi di libertà:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(q_{M+1}, \dots, q_N, p_1(0), \dots, p_M(0), \dot{q}_{M+1}, \dots, \dot{q}_N, t)$$

Quindi il sistema delle $N - M$ equazioni di tipo lagrangiano risulta disaccoppiato.