

## *ED. Equazioni cardinali della dinamica*

### *Dinamica dei sistemi*

La dinamica dei sistemi di punti materiali si può trattare, rispetto ad un osservatore inerziale, scrivendo l'equazione fondamentale della dinamica per il moto di ogni singolo punto materiale del sistema; per cui, per un sistema discreto di  $n$  punti materiali:

$$\mathcal{S} = \{(P_s, m_s); s = 1, 2, \dots, n\}$$

possiamo scrivere il sistema di equazioni differenziali del moto:

$$m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{f}_s, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{ED.1})$$

supponendo di conoscere le forza complessiva  $\mathbf{f}_s$  applicata ad ogni punto materiale, che sarà, in generale funzione della posizione, della velocità del punto  $P_s$  e del tempo:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_s(P_s, \mathbf{v}_s, t)$$

Il sistema (ED.1) è un sistema di  $n$  equazioni vettoriali, che nel caso più generale, proiettato sugli assi cartesiani, fornisce  $3n$  equazioni differenziali:

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s = f_{sx} \\ m_s \ddot{y}_s = f_{sy}, \\ m_s \ddot{z}_s = f_{sz} \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{ED.2})$$

per le  $3n$  funzioni incognite che caratterizzano il moto di tutti i punti:

$$x_s(t), \quad y_s(t), \quad z_s(t)$$

Il sistema delle equazioni differenziali del moto (ED.2) è un sistema di ordine  $6n$ . Se si conoscono le forze e le equazioni sono indipendenti tale sistema risulta determinato.

#### *Integrale generale e integrali particolari del moto*

Si estendono in modo naturale, dalla dinamica del punto materiale alla dinamica di un sistema di punti materiali, le definizioni di integrale generale e particolare del moto:

— Si dice *integrale generale del moto* l'integrale generale del sistema delle equazioni del moto, cioè la *famiglia delle*  $\infty^{6n}$  *soluzioni del sistema* (ED.2), caratterizzata da  $6n$  parametri, tanti quanto è l'ordine del sistema differenziale. L'integrale generale, dunque, si può rappresentare come:

$$\begin{cases} x_s = x_s(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \\ y_s = y_s(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}), & s = 1, 2, \dots, n \\ z_s = z_s(t, c_1, c_2, \dots, c_{6n}) \end{cases} \quad (\text{ED.3})$$

— Si dice *integrale particolare del moto* un integrale particolare del sistema differenziale del moto, cioè una delle soluzioni che si ottiene assegnando un valore particolare a ciascuna delle  $6n$  costanti  $c_1, c_2, \dots, c_{6n}$ , ovvero assegnando le condizioni iniziali sulle posizioni e le velocità di tutti i punti del sistema materiale; grazie al teorema di unicità, se le forze sono lipschitziane, ogni insieme di condizioni iniziali determina una sola soluzione per il moto.

*Integrali primi del moto*

Analogamente si estende la definizione di integrale primo del moto. Una funzione:

$$\psi = \psi(x_s, y_s, z_s, \dot{x}_s, \dot{y}_s, \dot{z}_s, t)$$

dove  $s$  può assumere tutti i valori da 1 a  $n$ , si dice *integrale primo del moto* del sistema di punti materiali, governato dal sistema (ED.2), quando, sostituendo in essa alle variabili  $x_s, y_s, z_s, \dot{x}_s, \dot{y}_s, \dot{z}_s$ , le funzioni  $x_s(t), y_s(t), z_s(t)$  che rappresentano un integrale particolare del moto e le loro derivate temporali, la funzione  $\psi$  assume un valore costante nel tempo:

$$\psi(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \dot{x}_s(t), \dot{y}_s(t), \dot{z}_s(t), t) = C, \quad \forall t$$

*Teorema dell'energia cinetica*

E' immediata anche l'estensione del teorema dell'energia cinetica alla dinamica dei sistemi di punti materiali. Infatti moltiplicando entrambi i membri della (ED.1) scalarmente per lo spostamento fisico  $dP_s$  di ogni punto, otteniamo:

$$m_s \mathbf{a}_s \times dP_s = \mathbf{f}_s \times dP_s$$

e sommando sull'indice  $s$ :

$$\sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s \times dP_s = \sum_{s=1}^n \mathbf{f}_s \times dP_s$$

Ma:

$$dL = \sum_{s=1}^n \mathbf{f}_s \times dP_s$$

è il lavoro totale delle forze agenti sul sistema di particelle. Inoltre:

$$\sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s \times dP_s = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{v}_s^2 \right) dt = dT$$

essendo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{v}_s^2$$

l'energia cinetica totale del sistema meccanico. Si ha così il risultato:

$$dT = dL$$

### *Integrale primo dell'energia*

Quando il sistema di forze è conservativo il differenziale del lavoro si può esprimere come differenziale esatto di un potenziale  $U$ :

$$dL = dU$$

Quindi, facendo uso del teorema dell'energia cinetica si ha, di conseguenza, che durante il moto:

$$dT = dU \quad \Longleftrightarrow \quad d(T - U) = 0$$

da cui segue:

$$T - U = \text{costante}$$

cioè l'integrale primo dell'energia, essendo:

$$E = T - U$$

l'energia meccanica totale del sistema di punti materiali.

### *Equazioni cardinali della dinamica*

Analogamente a quanto accade per il problema statico, che è un caso particolare di problema dinamico, in generale non conosciamo tutte le forze applicate al sistema di punti materiali, in quanto ci troviamo nella *impossibilità pratica* di determinare le *forze interne* al sistema. L'unica informazione, sempre valida, per le forze interne ci è data dal *terzo principio della dinamica* che ci assicura che le forze interne costituiscono un sistema di coppie di braccio nullo, per cui:

$$\mathbf{R}^{(i)} = 0, \quad \mathbf{M}_{\Omega}^{(i)} = 0$$

Seguendo la stessa strada utilizzata per il problema statico, allora, anche per la dinamica possiamo riscrivere il sistema (ED.1) separando le forze esterne dalle forze interne:

$$m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{f}_s^{(e)} + \mathbf{f}_s^{(i)}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{ED.4})$$

e manipolarlo in maniera tale da fare comparire il risultante e il momento risultante delle forze interne, che sono nulli per il terzo principio.

Sommando sull' indice  $s$  otteniamo:

$$\sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s = \sum_{s=1}^n \mathbf{f}_s^{(e)} + \sum_{s=1}^n \mathbf{f}_s^{(i)}$$

ovvero:

$$\sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{R}^{(i)}$$

Ma il risultante delle forze interne è nullo per il terzo principio della dinamica, e così le forze interne scompaiono e si ottiene:

$$\sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{R}^{(e)} \quad (\text{ED.5})$$

Analogamente si procede per i momenti. Si agisce con l'operatore di prodotto vettoriale  $\Omega P_s \wedge$  su entrambi i membri della (ED.4) ottenendo:

$$\Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(e)} + \Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(i)}$$

essendo  $\Omega$  un polo scelto arbitrariamente. Considerando poi la somma sull'indice  $s$  si ha:

$$\sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(e)} + \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(i)}$$

ovvero:

$$\sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{M}_{\Omega}^{(e)} + \mathbf{M}_{\Omega}^{(i)}$$

Il momento risultante delle forze interne è nullo per il terzo principio della dinamica e quindi rimane, anche per il momento, un'equazione che non coinvolge le forze interne:

$$\sum_{s=1}^n \Omega P_s m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{M}_\Omega^{(e)} \quad (\text{ED.6})$$

Rispetto al caso statico abbiamo ora in più, a primo membro, dei termini cinetici, che dobbiamo riscrivere in modo da esprimerli mediante grandezze *macroscopiche*, rendendo così utilizzabili le equazioni (ED.5) e (ED.6) che abbiamo ottenuto.

Per quanto riguarda la (ED.5) cominciamo con l'osservare che:

$$\sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s = \sum_{s=1}^n m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{Q}}$$

essendo:

$$\mathbf{Q} = \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{v}_s$$

la quantità di moto totale del sistema.

Per quanto riguarda la (ED.6), analogamente, ci aspettiamo di poter fare entrare in gioco la derivata temporale del momento della quantità di moto. Abbiamo, infatti:

$$\mathbf{K}_\Omega = \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{v}_s$$

Derivando:

$$\dot{\mathbf{K}}_\Omega = \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{v}_s = \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} (\Omega P_s \wedge m_s \mathbf{v}_s) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^n \frac{d}{dt} (OP_s - O\Omega) \wedge m_s \mathbf{v}_s + \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge \frac{d}{dt} (m_s \mathbf{v}_s) = \\
&= \sum_{s=1}^n \mathbf{v}_s \wedge m_s \mathbf{v}_s - \sum_{s=1}^n \mathbf{v}_\Omega \wedge m_s \mathbf{v}_s + \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \\
&= -\mathbf{v}_\Omega \wedge \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{v}_s + \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s
\end{aligned}$$

Dove  $O$  è un punto fisso, mentre  $\Omega$  può essere anche variabile. Dunque in conclusione abbiamo ottenuto il legame:

$$\sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \dot{\mathbf{K}}_\Omega + \mathbf{v}_\Omega \wedge \mathbf{Q}$$

E' comodo poi tenere conto che, per il teorema del moto del baricentro si ha:

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_G$$

Tenendo conto di questi risultati possiamo finalmente scrivere le equazioni cardinali della dinamica nella loro forma definitiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{R}^{(e,v)} \\ \dot{\mathbf{K}}_\Omega + m \mathbf{v}_\Omega \wedge \mathbf{v}_G = \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} + \mathbf{M}_\Omega^{(e,v)} \end{array} \right. \quad (\text{ED.7})$$

dove abbiamo distinto le forze esterne in *esterne attive* e *esterne vincolari*. Le equazioni cardinali della dinamica prendono anche il nome di *teorema*



della quantità di moto  $e$ , rispettivamente *teorema del momento della quantità di moto*.

- Le equazioni cardinali della dinamica, proiettate sugli assi cartesiani, sono al massimo sei, perciò possono servire a determinare il moto in problemi che hanno al massimo sei incognite: per questo esse vengono utilizzate nella dinamica del corpo rigido. Hanno il vantaggio di non contenere le forze interne e permettono di ottenere informazioni sulle reazioni vincolari in regime dinamico.

- Il termine  $m \mathbf{v}_\Omega \wedge \mathbf{v}_G$  può essere eliminato dall'equazione dei momenti con un'opportuna scelta del polo. È sufficiente infatti scegliere il polo  $\Omega$  in modo che sia in quiete rispetto all'osservatore del moto per ottenere  $\mathbf{v}_\Omega = 0$ , oppure sceglierlo coincidente con il baricentro. In questo caso le equazioni cardinali assumono la forma più semplice:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{R}^{(e,v)} \\ \dot{\mathbf{K}}_\Omega = \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} + \mathbf{M}_\Omega^{(e,v)} \end{cases} \quad (\text{ED.8})$$

### *Equazione del moto del baricentro*

La prima equazione cardinale della dinamica si può scrivere in un'altra forma, in taluni casi molto comoda, che prende il nome improprio di *equazione del moto del baricentro*. Grazie al teorema del moto del baricentro, derivando rispetto al tempo si ha:

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v}_G \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}} = m \mathbf{a}_G$$

Sostituendo nell'equazione del risultante si ottiene:

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e)} \quad (\text{ED.9})$$

La denominazione di *equazione del moto del baricentro* per la (ED.9) nasce dall'analogia formale con l'equazione fondamentale della dinamica per il moto di un punto. Come l'equazione fondamentale è sufficiente a determinare il moto di un punto  $P$  soggetto alla forza  $\mathbf{f}$ , così sembrerebbe che la (ED.9) fosse sufficiente a determinare il moto del baricentro di un sistema di punti materiali. Ma questo non è generalmente vero. Per comprenderlo basta esaminare le variabili da cui le forze possono dipendere:

— Nell'equazione del moto di un solo punto:

$$m \mathbf{a} = \mathbf{f}(P, \mathbf{v}, t)$$

la forza può dipendere solo dalla posizione, dalla velocità del punto, e dal tempo, mentre:

— Nell'equazione del moto del baricentro:

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e)}(P_1, P_2, \dots, P_n, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, t)$$

il risultante delle forze esterne dipende, in generale dalle posizioni, dalle velocità di tutti i punti del sistema e dal tempo. Infatti:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{f}_1^{(e)}(P_1, \mathbf{v}_1, t) + \mathbf{f}_2^{(e)}(P_2, \mathbf{v}_2, t) + \dots + \mathbf{f}_n^{(e)}(P_n, \mathbf{v}_n, t)$$

Di conseguenza l'equazione non è sufficiente a determinare il moto del baricentro, perchè contiene troppe incognite, a meno che non siano note tutte le funzioni  $OP_s(t)$ , cioè sia noto il moto dell'intero sistema.

L'equazione del moto del baricentro può determinare il moto del baricentro, anche quando non si conosce il moto dell'intero sistema, a condizione che il risultante dipenda dalle incognite nello stesso modo che si verifica per la dinamica di un solo punto. Cioè occorre che:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)}(G, \mathbf{v}_G, t) \quad (\text{ED.10})$$

In questo caso le incognite del problema sono effettivamente solo le coordinate del baricentro in funzione del tempo e il sistema è determinato. Un sistema meccanico in cui sia verificata questa condizione si dice *sistema G-determinato*. In un sistema di questo tipo il moto del baricentro si determina indipendentemente dal moto delle particelle che compongono il sistema stesso. L'esempio più familiare è fornito da un sistema soggetto alla sola forza peso; allora l'equazione del moto del baricentro si scrive:

$$m \mathbf{a}_G = m \mathbf{g}$$

Essendo costante, il peso è una forza che certamente soddisfa la condizione (ED.10). E' noto, infatti l'esempio del proiettile che esplose in volo senza influenzare il moto del baricentro, qualora si trascuri la resistenza dell'aria, che evidentemente non soddisfa la condizione (ED.10), risentendo di una modifica dell'area investita e del fattore di forma. Il fatto che il sistema soggetto alla sola forza peso risulti G-determinato è il motivo per cui un grave si può schematizzare con un punto materiale coincidente con il baricentro del corpo senza doversi preoccupare della struttura del corpo.

## *Dinamica del corpo rigido*

### *Corpo rigido libero*

Le equazioni cardinali della dinamica per un corpo rigido libero si specializzano nelle seguenti:

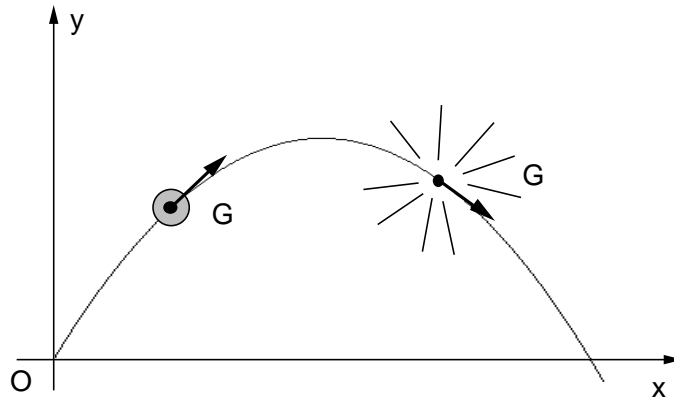


Figura ED. 1: sistema G-determinato

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(e,a)} \\ \dot{\mathbf{K}}_{\Omega} + m \mathbf{v}_{\Omega} \wedge \mathbf{v}_G = \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} \end{cases} \quad (\text{ED.11})$$

non essendo presenti le reazioni vincolari per un corpo libero. Se si proiettano queste equazioni su un sistema di assi cartesiani si ottengono sei equazioni per i sei gradi di libertà del corpo, costituiti, per esempio, dalle tre coordinate del baricentro  $x_G, y_G, z_G$  e dai tre angoli di Eulero  $\psi, \varphi, \vartheta$ . Il sistema è così determinato. In generale il risultante delle forze esterne attive e il loro momento risultante sono funzioni di questi sei parametri, delle loro derivate temporali e del tempo, per cui le sei equazioni sono accoppiate tra loro.

Osserviamo che possono esservi casi in cui il risultante dipende solo dalle coordinate del baricentro, dalle loro derivate e dal tempo, mentre il momento dipende solo dagli angoli di Eulero, dalle loro derivate e dal tempo. In questi casi il moto del baricentro si disaccoppia dal moto rotatorio del corpo attorno al baricentro. E' allora opportuno riscrivere la prima equazione cardinale nella forma di equazione del moto del baricentro, in quanto il sistema risulta essere

G-determinato. Inoltre conviene scegliere il polo di riduzione dei momenti coincidente con il baricentro.

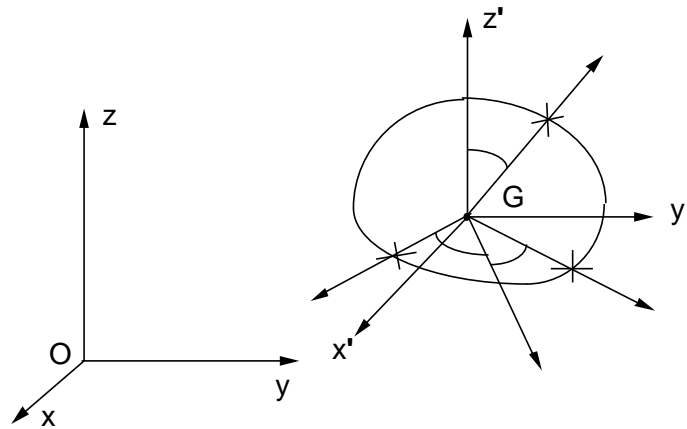


Figura ED. 2: corpo rigido libero

In questo modo, grazie al secondo teorema di König si ottiene l'informazione che il momento della quantità di moto viene a coincidere con quello calcolato dall'osservatore inerziale:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G^{(G)}$$

Le equazioni cardinali possono essere così riscritte:

$$\begin{cases} m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e,a)} \\ \dot{\mathbf{K}}_G^{(G)} = \mathbf{M}_G^{(e,a)} \end{cases} \quad (\text{ED.12})$$

In questa situazione il moto di traslazione del baricentro e il moto rotatorio del corpo attorno al baricentro risultano disaccoppiati e possono essere determinati separatamente, in quanto:

$$\mathbf{R}^{(e,a)} = \mathbf{R}^{(e,a)}(x_G, y_G, z_G, \dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{z}_G, t), \quad \mathbf{M}_G^{(e,a)}(\psi, \varphi, \vartheta, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, t)$$

Per quanto riguarda la determinazione del moto rotatorio attorno al baricentro, esso si riconduce al moto come è visto dall'osservatore baricentrale, il quale vede il corpo muoversi con il punto fisso  $G$ , coincidente con l'origine.

*Corpo rigido con un punto fisso: equazioni di Eulero*

Le equazioni cardinali della dinamica, specializzate per un corpo rigido con un punto fisso  $\Omega$ , scelto come polo di riduzione dei momenti sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(e,a)} + \Phi \\ \dot{\mathbf{K}}_\Omega = \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} \end{cases} \quad (\text{ED.13})$$

Essendo presente una sola reazione vincolare  $\Phi$ , applicata nel punto fisso, conviene scegliere il punto fisso come polo di riduzione ottenendo due vantaggi: i) la scomparsa del termine cinetico che contiene la velocità del polo, ii) la scomparsa del momento della reazione vincolare, che risulta nullo in quanto calcolato rispetto al punto di applicazione della reazione stessa.

Il sistema, proiettato su una terna di assi cartesiani, contiene sei equazioni nelle sei incognite rappresentate dai tre angoli di Eulero, che sono i tre gradi di libertà, e dalle tre componenti della reazione vincolare in regime dinamico. Si determinano, in questo modo, sia il moto che la reazione vincolare. Per quanto riguarda la determinazione del moto, chiaramente, le tre equazioni pure del moto sono date dall'equazione vettoriale dei momenti, che non contiene la reazione vincolare.

*Equazioni pure del moto*

Le equazioni del moto si possono scrivere in maniera conveniente introducendo l'espressione del momento della quantità di moto per un corpo rigido con un punto fisso:

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathcal{I} \boldsymbol{\omega}$$

dove  $\mathcal{I}$  è la matrice d'inerzia relativa al punto fisso preso come centro.

A noi serve la derivata rispetto al tempo di  $\mathbf{K}_\Omega$ , valutata da un osservatore inerziale  $\Omega xyz$ , la quale compare nell'equazione dei momenti. Questo calcolo, però comporta l'inconveniente di dover considerare la matrice  $\mathcal{I}$  come variabile nel tempo, in quanto i momenti d'inerzia di un corpo che si muove rispetto ad una terna di assi, sono variabili. E' conveniente, allora, introdurre anche una terna di assi solidali con il corpo rigido  $\Omega \xi \eta \zeta$  rispetto alla quale  $\mathcal{I}$  risulta evidentemente costante, in quanto le masse risultano fisse rispetto agli assi solidali. Allora, facendo uso del teorema di derivazione relativa — che collega le derivate temporali dei vettori, valutate rispetto al sistema relativo, che nel nostro caso è il sistema solidale, con quelle valutate rispetto al sistema assoluto, che è il sistema inerziale — possiamo scrivere:

$$\frac{d^{(a)}}{dt} \mathbf{K}_\Omega = \frac{d^{(r)}}{dt} \mathbf{K}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}_\Omega$$

Lavorando rispetto all'osservatore relativo abbiamo il vantaggio che  $\mathcal{I}$  è costante, e quindi si ha:

$$\frac{d^{(r)}}{dt} \mathbf{K}_\Omega = \frac{d^{(r)}}{dt} (\mathcal{I} \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

Abbiamo denotato con il punto la derivata di  $\boldsymbol{\omega}$  ricordando che per il vettore velocità angolare e per tutti i vettori ad esso paralleli la derivata assoluta e la derivata relativa coincidono e non vi è, dunque, possibilità di confusione. Si può allora concludere che:

$$\frac{d^{(a)}}{dt} \mathbf{K}_\Omega = \mathcal{L} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{L} \boldsymbol{\omega}$$

Questo risultato, inserito nell'equazione dei momenti, che fornisce le equazioni pure del moto del corpo rigido con un punto fisso, conduce a:

$$\mathcal{L} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{L} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} \quad (\text{ED.14})$$

#### *scelta degli assi solidali*

Ora facciamo due osservazioni per poter procedere convenientemente:

— A differenza di quanto accade in statica le equazioni della dinamica del corpo rigido con un punto fisso coinvolgono la matrice d'inerzia, per cui non conviene proiettare le equazioni sugli assi del sistema assoluto, ma conviene proiettarle sugli assi del sistema relativo, perchè rispetto ad essi  $\mathcal{L}$  ha elementi di matrice costanti.

— Tra tutte le possibili scelte di assi solidali che si possono effettuare, conviene scegliere una terna di *assi principali d'inerzia*, perchè rispetto ad assi principali la matrice  $\mathcal{L}$  si rappresenta in forma diagonale, con il vantaggio di ottenere delle equazioni più semplici.

Avremo allora:

$$\mathcal{L} \boldsymbol{\omega} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A p \\ B q \\ C r \end{pmatrix}$$



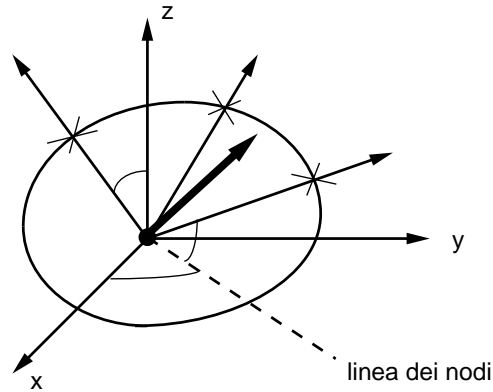


Figura ED. 3: corpo rigido con un punto fisso

essendo  $p, q, r$  le componenti di  $\boldsymbol{\omega}$  rispetto al sistema solidale. Di conseguenza si ha:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} \equiv ((C - B)qr, (A - C)pr, (B - A)pq)$$

Allora l'equazione vettoriale (ED.14), proiettata sugli assi principali d'inerzia conduce al sistema differenziale:

$$\boxed{\begin{cases} A\dot{p} - (B - C)qr = M_{\xi}^{(e,a)} \\ B\dot{q} - (C - A)pr = M_{\eta}^{(e,a)} \\ C\dot{r} - (A - B)pq = M_{\zeta}^{(e,a)} \end{cases}} \quad (\text{ED.15})$$

Queste equazioni sono note come *equazioni di Eulero*. Le incognite sono gli angoli di Eulero  $\psi, \varphi, \vartheta$  che compaiono, insieme alle loro derivate nelle

espressioni di  $p, q, r$  e nel momento delle forze esterne attive. Il sistema è non lineare e generalmente non risolvibile analiticamente. Qualora sia stato integrato il moto è possibile determinare anche la reazione vincolare in regime dinamico, mediante l'equazione del risultante.

### *Corpo rigido con un asse fisso*

Per il corpo rigido con un asse fisso, supposto di avere bloccato l'asse fissando due punti di esso, le equazioni cardinali della dinamica si specializzano nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 \\ \dot{\mathbf{K}}_{\Omega_1} = \mathbf{M}_{\Omega_1}^{(e,a)} + \Omega_1 \Omega_2 \wedge \mathbf{\Phi}_2 \end{cases} \quad (\text{ED.16})$$

avendo scelto per convenienza il polo coincidente con il punto fisso  $\Omega_1$ . Con questa scelta si ha il duplice vantaggio di eliminare, dall'equazione del momento, il termine cinetico che coinvolge la velocità del polo, e quello di eliminare il momento di  $\mathbf{\Phi}_1$  che, essendo applicata nel polo, ha momento nullo.

Poichè il corpo rigido con un asse fisso è un caso particolare di corpo rigido con un punto fisso, il momento della quantità di moto si esprime nella forma:

$$\mathbf{K}_{\Omega} = \mathcal{I} \boldsymbol{\omega}$$

e la sua derivata assoluta rispetto al tempo è allora:

$$\frac{d^{(a)}}{dt} \mathbf{K}_{\Omega} = \mathcal{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{I} \boldsymbol{\omega}$$

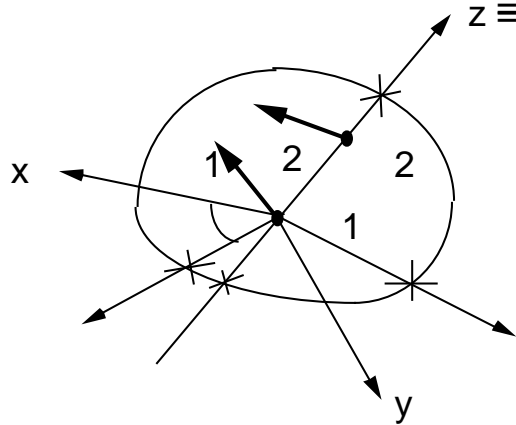


Figura ED. 4: corpo rigido con un asse fisso

Di conseguenza l'equazione del momento si riscrive:

$$\mathcal{L} \dot{\omega} + \omega \wedge \mathcal{L} \omega = M_{\Omega_1}^{(e,a)} + \Omega_1 \Omega_2 \wedge \Phi_2 \quad (\text{ED.17})$$

### Equazione pura del moto

Il problema ha un solo grado di libertà  $\vartheta$  e quindi occorre una sola equazione pura del moto: questa si può ottenere dalla componente lungo l'asse fisso dell'equazione del momento scritta nella forma (ED.17). Infatti considerando il prodotto scalare della (ED.17) per  $e_3$  otteniamo:

$$e_3 \times \mathcal{L} \dot{\omega} + e_3 \times \omega \wedge \mathcal{L} \omega = e_3 \times M_{\Omega_1}^{(e,a)} + e_3 \times \Omega_1 \Omega_2 \wedge \Phi_2$$

I prodotti misti sono entrambi nulli perchè i vettori  $\omega$  e  $\Omega_1 \Omega_2$  sono paralleli a  $e_3$  e quindi:

$$\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\omega} \wedge \underline{\mathcal{I}} \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \mathbf{e}_3 \times \Omega_1 \Omega_2 \wedge \Phi_2 = 0$$

Possiamo allora riscrivere:

$$\mathbf{e}_3 \times \underline{\mathcal{I}} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{M}_{\Omega_1}^{(e,a)}$$

A secondo membro riconosciamo il momento assiale delle forze esterne attive rispetto all'asse fisso  $M_{\zeta}^{(e,a)}$ . A primo membro, esprimendo la velocità angolare come:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_3$$

otteniamo:

$$\mathbf{e}_3 \times \underline{\mathcal{I}} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{e}_3 \times \underline{\mathcal{I}} \mathbf{e}_3 \ddot{\vartheta}$$

Ma:

$$\mathbf{e}_3 \times \underline{\mathcal{I}} \mathbf{e}_3 = \sigma_{33} = C$$

elemento di matrice che rappresenta il momento d'inerzia  $C$  del corpo rispetto all'asse fisso e che indichiamo, abitualmente, con  $\mathcal{J}$ . Abbiamo allora l'equazione del moto del corpo rigido con un asse fisso:

$$\mathcal{J} \ddot{\vartheta} = M_{\zeta}^{(e,a)}(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$$

(ED.18)

*Momento posizionale: integrale primo dell'energia*

Un caso particolare notevole si realizza quando il momento assiale delle forze esterne attive, relativo all'asse  $\zeta$  è posizionale, cioè dipende solo da  $\vartheta$ . In questo caso, infatti l'equazione pura del moto si scrive:

$$\mathcal{J} \ddot{\vartheta} = M_{\zeta}^{(e,a)}(\vartheta) \quad (\text{ED.19})$$

Il momento risulta essere conservativo; infatti il lavoro è un differenziale esatto:

$$dL^{(e,a)} = \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times d\boldsymbol{\psi} = \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \mathbf{e}_3 d\vartheta = M_{\zeta}^{(e,a)}(\vartheta) d\vartheta = d \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} M_{\zeta}^{(e,a)}(\hat{\vartheta}) d\hat{\vartheta}$$

Il potenziale è dato da:

$$U(\vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} M_{\zeta}^{(e,a)}(\hat{\vartheta}) d\hat{\vartheta}$$

Di conseguenza esiste l'integrale primo dell'energia, non essendoci altri contributi non nulli del lavoro:

$$\frac{1}{2} \mathcal{J} \dot{\vartheta}^2 - U(\vartheta) = E$$

mediante il quale si ottiene:

$$\dot{\vartheta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mathcal{J}} [E + U(\vartheta)]}$$

Il problema si porta allora a quadrature, ottenendo:

$$t = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\hat{\vartheta}}{\sqrt{\frac{2}{J} [E + U(\hat{\vartheta})]}} \quad (\text{ED.20})$$

La condizione di realtà della radice quadrata:

$$E + U(\hat{\vartheta}) \geq 0$$

permette di identificare gli intervalli di  $\vartheta$  in cui il moto può avvenire.

*Forza peso: pendolo composto*

Un esempio classico è dato dal *pendolo composto* o *pendolo fisico*, che è un corpo rigido con un asse fisso orizzontale, privo di attrito, soggetto alla forza peso.

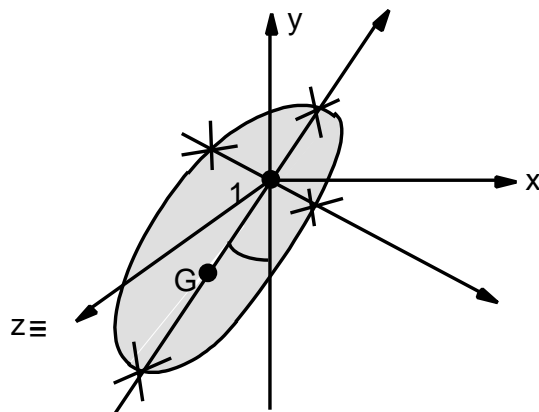


Figura ED. 5: pendolo composto

In questo caso le forze esterne attive sono riducibili al vettore risultante:

$$\mathbf{R}^{(e,a)} = m \mathbf{g}$$

applicato nel baricentro  $G$  del corpo. Il momento delle forze esterne attive, rispetto al polo  $\Omega_1$  risulta, di conseguenza, dato da:

$$\mathbf{M}_{\Omega_1} = \Omega_1 G \wedge m \mathbf{g} = -m g \ell \operatorname{sen} \vartheta \mathbf{e}_3$$

essendo:

$$\ell = |\Omega_1 G|$$

e  $\vartheta$  caratterizzato come in figura (ED. 5).

Abbiamo chiaramente:

$$M_{\zeta}^{(e,a)}(\vartheta) = -m g \ell \operatorname{sen} \vartheta$$

Quindi il potenziale è dato da:

$$U(\vartheta) = m g \ell \cos \vartheta$$

Assegnando le condizioni iniziali si può calcolare l'energia meccanica totale del moto. Per esempio, lasciando partire il pendolo con velocità iniziale nulla:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \dot{\vartheta}(0) = 0$$

si ha:

$$E = -U(0) = -m g \ell \cos \vartheta_0$$

Il problema si porta a quadrature ottenendo la seguente espressione per l'integrale (ED.20):

$$t = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\hat{\vartheta}}{\sqrt{\frac{2}{\mathcal{J}} m g \ell (\cos \hat{\vartheta} - \cos \vartheta_0)}} \quad (\text{ED.21})$$

Osserviamo che il moto risulta essere identico a quello di un pendolo semplice di lunghezza:

$$\lambda = \frac{\mathcal{J}}{m \ell}$$

### Determinazione delle reazioni vincolari

Ritorniamo al caso generale del corpo rigido con un asse fisso. Per il calcolo delle reazioni vincolari, dopo aver affrontato il problema del moto, occorre scrivere tutte le componenti delle reazioni vincolari sul sistema di assi cartesiani. Proiettiamo su un sistema solidale, come abbiamo fatto nel caso del corpo rigido con un punto fisso, in modo che gli elementi della matrice d'inerzia risultino costanti nel tempo; in questo caso, però, non possiamo scegliere gli assi solidali in modo che siano assi principali d'inerzia, in quanto l'asse fisso sul quale abbiamo proiettato l'equazione dei momenti per ottenere l'equazione pura del moto, è assegnato dal problema e, in generale non sarà un asse principale. Per cui dobbiamo rappresentare la matrice d'inerzia nella sua forma più generale. Otteniamo allora le seguenti rappresentazioni per i vettori che entrano in gioco nelle equazioni cardinali:

$$\mathcal{L} \boldsymbol{\omega} \equiv \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -B' \dot{\vartheta} \\ -A' \dot{\vartheta} \\ C \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{L} \boldsymbol{\omega} \equiv (A' \dot{\vartheta}^2, -B' \dot{\vartheta}^2, 0)$$

Abbiamo, così:

$$\dot{\mathbf{K}}_{\Omega} = \mathcal{L} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{L} \boldsymbol{\omega} \equiv (-B' \ddot{\vartheta} + A' \dot{\vartheta}^2, -A' \ddot{\vartheta} - B' \dot{\vartheta}^2, \mathcal{J} \ddot{\vartheta})$$

Possiamo allora scrivere le equazioni cardinali per componenti nella seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_{\xi} = R_{\xi}^{(e,a)} + \Phi_{1\xi} + \Phi_{2\xi} \\ \dot{Q}_{\eta} = R_{\eta}^{(e,a)} + \Phi_{1\eta} + \Phi_{2\eta} \\ \dot{Q}_{\zeta} = R_{\zeta}^{(e,a)} + \Phi_{1\zeta} + \Phi_{2\zeta} \\ -B' \ddot{\vartheta} + A' \dot{\vartheta}^2 = M_{\xi}^{(e,a)} - \ell \Phi_{2\eta} \\ -A' \ddot{\vartheta} - B' \dot{\vartheta}^2 = M_{\eta}^{(e,a)} + \ell \Phi_{2\xi} \\ \mathcal{J} \ddot{\vartheta} = M_{\zeta}^{(e,a)} \end{array} \right. \quad (\text{ED.22})$$

dove si è introdotto:

$$\ell = |\Omega_1 \Omega_2|$$

L'ultima equazione è l'equazione pura del moto ed è già stata utilizzata; rimangono cinque equazioni per le sei incognite costituite dalle componenti delle reazioni vincolari. Come nel problema statico anche nel caso dinamico rimangono indeterminate le componenti delle reazioni vincolari lungo l'asse fisso. Il sistema può essere completamente determinato nel caso in cui si

faccia l'ipotesi che uno dei due vincoli sia costituito da una cerniera cilindrica priva di attrito (per esempio in  $\Omega_2$ ), perchè, in questo caso si ha l'ulteriore informazione:

$$\Phi_{2\zeta} = 0$$

### Equilibratura dinamica

Il problema dell' *equilibratura dinamica* consiste nel ricercare se esistono e in caso affermativo determinarle, delle condizioni alle quali, a parità di forze esterne attive, le reazioni vincolari in regime dinamico sono uguali alle reazioni vincolari all'equilibrio.

Affinchè questa situazione possa verificarsi occorre che i termini cinetici che compaiono nelle equazioni del risultante e nelle componenti  $\xi, \eta$  delle equazioni del momento — che sono le uniche che contengono le reazioni vincolari — siano nulli qualunque sia il moto del corpo rigido con un asse fisso.

Infatti si può scrivere la seguente tabella di comparazione tra equazioni dinamiche ed equazioni statiche.

<i>Dinamica</i>	<i>Statica</i>
$\left\{ \begin{array}{l} m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e,a)} + \Phi_1^{(D)} + \Phi_2^{(D)} \\ -B' \ddot{\vartheta} + A' \dot{\vartheta}^2 = M_\xi^{(e,a)} - \ell \Phi_{2\eta}^{(D)} \\ -A' \ddot{\vartheta} - B' \dot{\vartheta}^2 = M_\eta^{(e,a)} + \ell \Phi_{2\xi}^{(D)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \mathbf{R}^{(e,a)} + \Phi_1^{(S)} + \Phi_2^{(S)} \\ 0 = M_\xi^{(e,a)} - \ell \Phi_{2\eta}^{(S)} \\ 0 = M_\eta^{(e,a)} + \ell \Phi_{2\xi}^{(S)} \end{array} \right.$

E' chiaro allora che l'annullarsi dei termini cinetici:

$$m \mathbf{a}_G = 0, \quad -B' \ddot{\vartheta} + A' \dot{\vartheta}^2 = 0, \quad A' \ddot{\vartheta} + B' \dot{\vartheta}^2 = 0$$

in ogni istante e qualunque sia il moto, cioè qualunque siano  $\vartheta, \dot{\vartheta}, \ddot{\vartheta}$  può realizzarsi solo a condizione che:

$$\mathbf{a}_G = 0, \quad A' = 0, \quad B' = 0$$

Ma il moto di  $G$  è rotatorio e la sua accelerazione, si esprime mediante le formule dei moti rigidi:

$$\mathbf{a}_G = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega G - \boldsymbol{\omega}^2 QG$$

essendo  $\Omega$  un punto dell'asse fisso e  $Q$  la proiezione di  $G$  sull'asse;  $\mathbf{a}_G$  può essere nulla per qualunque moto se e solo se  $G \equiv Q$ , cioè se il baricentro si trova sull'asse fisso. Le restanti condizioni su  $A'$  e  $B'$  significano, poi, che l'asse fisso deve essere un asse principale d'inerzia.

Qualora queste condizioni non siano verificate nascono degli incrementi del risultante delle reazioni vincolari e del momento delle reazioni vincolari, dovuti al fatto che il sistema si trova in regime dinamico, anzichè in equilibrio.

i) Se il baricentro  $G$  è fuori asse si ha un incremento delle reazioni vincolari *normale all'asse fisso*, per cui il moto del corpo tende a portarlo fuori dall'asse e il vincolo deve contrastare questa sollecitazione:

$$\Delta \mathbf{R}^{(e,v)} = m \mathbf{a}_G = m (\dot{\vartheta} \mathbf{e}_3 \wedge \Omega G - \dot{\vartheta}^2 QG)$$

Evidentemente i due contributi sono normali rispetto all'asse, in quanto il prodotto vettoriale contiene il versore dell'asse fisso, mentre il termine di accelerazione centripeta contiene  $QG \perp \mathbf{e}_3$ .

ii) Se l'asse fisso non è un asse principale d'inerzia nasce una coppia, che il vincolo deve contrastare con l'incremento del momento:

$$\Delta \mathbf{M}_{\Omega_1}^{(e,v)} \equiv (-B'\ddot{\vartheta} + A'\dot{\vartheta}^2, -A'\ddot{\vartheta} - B'\dot{\vartheta}^2, 0)$$

normale all'asse di rotazione, il cui effetto è, quindi, quello di far deviare il corpo dalla rotazione attorno all'asse fisso. Di qui la denominazione di *momenti di deviazione* introdotta per gli elementi della matrice d'inerzia che non appartengono alla diagonale principale.

In modulo si ha:

$$|\Delta \mathbf{M}_{\Omega_1}^{(e,v)}| = \sqrt{(A'^2 + B'^2)(\ddot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}^4)}$$

L'entità del momento addizionale a cui sono sottoposti i vincoli è proporzionale alla combinazione pitagorica dell'accelerazione angolare e del quadrato della velocità angolare. Notiamo che in assenza di accelerazione angolare il momento risulta proporzionale al quadrato della velocità angolare, e questo ricorda il comportamento della forza centrifuga; per cui i momenti di deviazione sono detti anche *momenti centrifughi*.

### *Principio dell'effetto giroscopico*

Dopo aver esaminato il moto del corpo rigido nella sua generalità, passiamo all'analisi di qualche caso notevole di moto di un corpo rigido con un punto fisso.

Il primo caso notevole si ha quando il corpo rigido in questione è un giroscopio. Abbiamo visto che le equazioni di Eulero, che regolano il moto di un corpo rigido con un punto fisso, sono non lineari e generalmente non integrabili per via analitica; tuttavia quando il corpo è un giroscopio, si possono trarre delle informazioni importanti sull'andamento del moto, facendo un'approssimazione delle equazioni di Eulero, sotto opportune ipotesi.

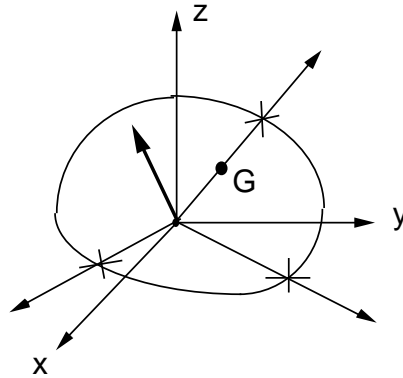


Figura ED. 6: principio dell'effetto giroscopico: scelta degli assi

Scegliamo gli assi come in figura (ED. 6) in maniera che il punto fisso  $\Omega \equiv O$  sia l'origine comune del sistema assoluto  $Oxyz$  e del sistema relativo, solidale al corpo rigido  $\Omega\xi\eta\zeta$ . Inoltre l'asse  $\zeta$  sia coincidente con l'asse giroscopico. Di conseguenza anche gli assi  $\eta, \zeta$  risultano essere assi principali d'inerzia, in quanto assi di simmetria per la sezione dell'ellissoide normale all'asse giroscopico, sezione che è una circonferenza.

Il *principio dell'effetto giroscopico*, che ora trattiamo, è un *principio di approssimazione* che si fonda sulle seguenti tre ipotesi:

— *ipotesi di struttura*: il corpo è un giroscopio e il punto fisso si trova sull'asse giroscopico;

— *ipotesi sulle forze*: il momento assiale delle forze esterne attive rispetto all'asse giroscopico è nullo;

— *ipotesi sulle condizioni iniziali*: la velocità angolare iniziale è diretta lungo l'asse giroscopico ed ha modulo opportunamente grande.

Traduciamo matematicamente queste tre ipotesi. Per quanto riguarda

l'ipotesi di struttura, osserviamo che, per definizione di giroscopio, il baricentro del corpo si trova sull'asse giroscopico, in quanto è il centro dell'ellissoide centrale d'inerzia. Tracciando le rette  $\xi_G, \eta_G$  per  $G$ , parallele rispettivamente agli assi  $\xi, \eta$ , la condizione che il corpo è un giroscopio si traduce nella:

$$A_G = B_G$$

dove  $A_G, B_G$  sono i momenti principali d'inerzia relativi agli assi  $\xi_G, \eta_G$ . Per il teorema di Huygens-Steiner abbiamo di conseguenza:

$$A = A_G + m |\Omega G|^2, \quad B = B_G + m |\Omega G|^2$$

da cui segue:

$$A = B$$

dove  $A, B$  sono i momenti principali d'inerzia relativi agli assi solidali  $\xi, \eta$ .

Possiamo allora riscrivere le tre ipotesi nella forma seguente:

$$1) \quad A = B \quad (\text{ED.23})$$

$$2) \quad M_\zeta^{(e,a)} = 0 \quad (\text{ED.24})$$

$$3) \quad \boldsymbol{\omega}_0 \equiv (0, 0, r_0), \quad |r_0| \gg \Omega \quad (\text{ED.25})$$

essendo  $\Omega$  una quantità che dovremo caratterizzare in seguito.

Fatte queste premesse, la trattazione del principio dell'effetto giroscopico si svolge attraverso i seguenti passi logici:

*primo passo: determinazione di un integrale primo*

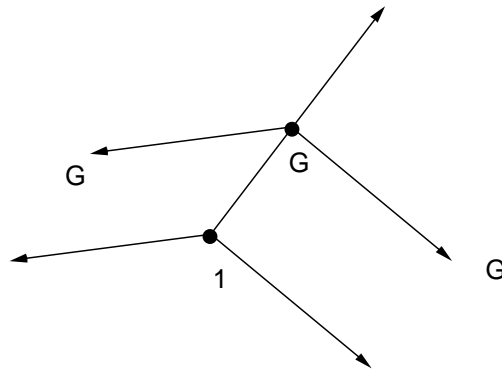


Figura ED. 7: un giroscopio ha struttura giroscopica rispetto a tutti i punti dell'asse giroscopico

Si introducono le informazioni (ED.23) e (ED.24) nella terza equazione di Eulero:

$$C \dot{r} - (A - B) p q = M_{\zeta}^{(e,a)}$$

ottenendo:

$$C \dot{r} = 0$$

Evidentemente, essendo  $C \neq 0$  segue:

$$r = r_0 \tag{ED.26}$$

Questo significa che la componente della velocità angolare lungo l'asse giroscopico è un *integrale primo del moto*.

*secondo passo: approssimazione*

Con il primo passo non è stata fatta ancora alcuna approssimazione nelle equazioni del moto. L'approssimazione viene fatta al secondo passo, agendo sul momento della quantità di moto. La rappresentazione di  $\mathbf{K}_\Omega$  sugli assi solidali, che sono assi principali d'inerzia, tenendo conto anche delle informazioni (ED.23) e (ED.26), si scrive:

$$\mathbf{K}_\Omega = A p \mathbf{e}_1 + A q \mathbf{e}_2 + C r_0 \mathbf{e}_3$$

in quanto la matrice d'inerzia è diagonale rispetto agli assi principali d'inerzia.

Ora sappiamo che le funzioni:

$$p = p(t), \quad q = q(t)$$

sono nulle all'istante  $t = 0$ ; inoltre sono anche funzioni continue, dal momento che sono derivabili, quindi non potranno assumere in tempi brevi valori molto elevati. Di conseguenza scelto un istante di tempo  $\tau > 0$  e definito:

$$\Omega = \max_{t \in [0, \tau]} \left\{ \left| \frac{A p}{C} \right|, \left| \frac{A q}{C} \right| \right\}$$

sarà possibile determinare un valore di  $\tau$  sufficientemente piccolo da garantire che:  $|r_0| \gg \Omega$ . L'esistenza del massimo è garantita analiticamente dal teorema di Weierstrass, essendo le funzioni continue definite su un intervallo compatto.

E' conveniente a questo punto riscrivere:

$$\mathbf{K}_\Omega = C r_0 \left( \frac{A p}{C r_0} \mathbf{e}_1 + \frac{A q}{C r_0} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right)$$



Nell'intervallo di tempo  $[0, \tau]$  allora si può assumere:

$$\left| \frac{A p}{C r_0} \right| \leq \frac{\Omega}{|r_0|} \ll 1, \quad \left| \frac{A q}{C r_0} \right| \leq \frac{\Omega}{|r_0|} \ll 1$$

Quindi è lecita l'approssimazione:

$$\mathbf{K}_\Omega \approx C r_0 \mathbf{e}_3 \quad (\text{ED.27})$$

*terzo passo: conseguenze nelle equazioni del moto*

Le conseguenze dell'approssimazione (ED.27) nell'equazione vettoriale del moto del corpo rigido con un punto fisso:

$$\dot{\mathbf{K}}_\Omega = \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)}$$

si valutano procurandoci anzitutto la derivata temporale del momento della quantità di moto nella forma approssimata (ED.27):

$$\dot{\mathbf{K}}_\Omega \approx C r_0 \frac{d\mathbf{e}_3}{dt}$$

e introducendola nell'equazione del moto, ottenendo:

$$C r_0 \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} \quad (\text{ED.28})$$

Da questo risultato discendono due proprietà dei fenomeni giroscopici:

— *prima proprietà: tenacia dell'asse giroscopico*

Riscrivendo l'equazione del moto approssimata (ED.28) nella forma:

$$\frac{de_3}{dt} = \frac{M_{\Omega}^{(e,a)}}{C r_0}$$

si osserva che essendo, per ipotesi,  $|r_0|$  opportunamente elevato, il secondo membro dell'equazione tende a zero, se il momento delle forze non è troppo grande. Questo significa che il versore dell'asse giroscopico  $e_3$  tende a rimanere costante durante il moto. Dal punto di vista meccanico questo significa che l'asse giroscopico tende a mantenere inalterata la propria direzione rispetto all'osservatore assoluto. La tenacia è tanto più rilevante quanto più elevato è  $|r_0|$  e quanto più grande è il momento d'inerzia  $C$  del giroscopio. Questa proprietà viene utilizzata negli stabilizzatori giroscopici impiegati sulle navi.

— *seconda proprietà: tendenza al parallelismo*

Qualora il momento delle forze esterne attive non sia trascurabile la variazione della direzione dell'asse giroscopico risulta, istante per istante, parallela al momento delle forze e non alle forze stesse.

- L'esperienza ci dice che, nella pratica il valore di  $\tau$  che può essere raggiunto con opportune scelte di  $r_0$  e  $C$  può essere anche notevolmente elevato. Compensando le perdite di energia cinetica dovute alla presenza degli attriti, è possibile mantenere le condizioni che verificano il principio dell'effetto giroscopico per il tempo voluto.

### **Giroscopio pesante**

Quando la forza attiva è la forza peso, il giroscopio viene detto *pesante*. L'esempio più familiare è dato dalla trottola. Notiamo che, essendo la forza peso applicata al baricentro del corpo, che si trova sull'asse giroscopico, la condizione (ED.24) risulta verificata:

$$M_{\zeta}^{(e,a)} = \Omega G \wedge m \mathbf{g} \times e_3 = 0$$

essendo  $\Omega G$  parallelo a  $e_3$  e quindi i tre vettori che compaiono nel prodotto misto sicuramente complanari.

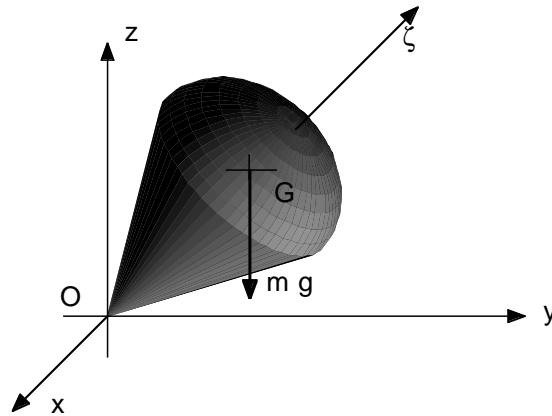


Figura ED. 8: giroscopio pesante

Osserviamo che quando la forza attiva non è il peso, il principio dell'effetto giroscopico è applicabile anche se il corpo non è un giroscopio, ma è solamente a struttura giroscopica rispetto ad  $\Omega$ . Mentre la forza peso può avere momento assiale nullo solo quando l'asse di rivoluzione dell'ellissoide d'inerzia contiene il baricentro.

Mostriamo che, in assenza di attrito, il moto del giroscopio pesante è un moto di precessione. Per vederlo, basta esplicitare nella (ED.28) la derivata del versore dell'asse giroscopico, facendo uso delle formule di Poisson:

$$\frac{de_3}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge e_3$$

ottenendo:

$$C r_0 \boldsymbol{\omega} \wedge e_3 = \Omega G \wedge m \mathbf{g}$$

essendo:

$$\mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} = \Omega G \wedge m \mathbf{g} \quad (\text{ED.29})$$

il momento polare della forza peso. Introduciamo le rappresentazioni dei vettori sugli assi:

$$\Omega G = \ell \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g} = -g \mathbf{e}_3$$

dove con  $\ell$  si è indicata la distanza del baricentro dal punto fisso e con  $\mathbf{e}_3$  il versore dell'asse  $z$  del riferimento assoluto. Allora la (ED.29) diviene:

$$C r_0 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_3 = -m g \ell \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3$$

che si può riscrivere invertendo il prodotto vettoriale a secondo membro e raccogliendo:

$$(C r_0 \boldsymbol{\omega} - m g \ell \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_3 = 0$$

Questa condizione è soddisfatta se il vettore entro parentesi è parallelo al versore  $\mathbf{e}_3$  oppure è nullo, e cioè se:

$$C r_0 \boldsymbol{\omega} - m g \ell \mathbf{e}_3 = \lambda \mathbf{e}_3$$

Possiamo allora esprimere:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{m g \ell}{C r_0} \mathbf{e}_3 + \frac{\lambda}{C r_0} \mathbf{e}_3 \quad (\text{ED.30})$$

La velocità angolare risulta dunque dalla composizione di un vettore diretto come l'asse giroscopico (asse di figura) e di un vettore diretto come

l'asse  $z$  solidale con lo spazio assoluto (asse di precessione). Per poter parlare di moto di precessione rimane da dimostrare che l'angolo compreso fra questi due assi si mantiene costante durante il moto (integrale primo). Abbiamo che tale angolo è definito da:

$$\cos \vartheta = \mathbf{c}_3 \times \mathbf{e}_3$$

Quindi, derivando e tenendo conto delle formule di Poisson e del fatto che  $\mathbf{c}_3$  è costante rispetto all'osservatore assoluto, abbiamo:

$$\frac{d \cos \vartheta}{dt} = \mathbf{c}_3 \times \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \mathbf{c}_3 \times \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_3 = 0$$

Il prodotto misto risulta nullo, in quanto, come abbiamo appena dimostrato  $\boldsymbol{\omega}$  è una combinazione lineare di  $\mathbf{c}_3$  e  $\mathbf{e}_3$ ; quindi i tre vettori sono complanari. Si può, dunque scrivere l'integrale primo:

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 \quad (\text{ED.31})$$

Nella realtà la presenza dell'attrito dissipa energia meccanica in calore e la trottola non riesce a mantenere indefinitamente il moto di precessione.

Moltiplicando scalarmente la (ED.30) per  $\mathbf{e}_3$  e tenendo conto della (ED.31) otteniamo:

$$r_0 = \frac{m g \ell}{C r_0} \cos \vartheta_0 + \frac{\lambda}{C r_0}$$

dal momento che  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{r} = r_0$ . Ricaviamo allora:

$$\lambda = C r_0^2 - m g \ell \cos \vartheta_0$$

Finalmente abbiamo l'espressione della velocità angolare:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_p \mathbf{c}_3 + \omega_f \mathbf{e}_3$$

che fornisce le velocità angolari di precessione  $\omega_p$  e di rotazione propria  $\omega_f$ :

$$\omega_p = \frac{m g \ell}{C r_0}, \quad \omega_f = r_0 - \frac{m g \ell}{C r_0} \cos \vartheta_0$$

Osserviamo che  $\omega_p$  e  $\omega_f$  sono costanti e quindi la precessione del giroscopio pesante risulta essere *regolare*.

*Moti alla Poinsot*

Il moto di un corpo rigido con un punto fisso si dice *moto alla Poinsot* o *moto per inerzia* quando avviene in assenza di momento delle forze esterne attive:

$$\mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} = 0 \quad (\text{ED.32})$$

essendo  $\Omega$  il punto fisso. In tal caso mostriamo che esistono due integrali primi del moto tra loro indipendenti:

i)  $\mathbf{K}_{\Omega} = \text{costante}$

ii)  $T = \text{costante}$

E in conseguenza di questi risulta costante la proiezione della velocità angolare nella direzione del momento della quantità di moto, cioè sussiste una terza condizione:

iii)  $|\boldsymbol{\omega}| \cos \vartheta = \text{costante}$

Figura ED. 9: proiezione della velocità angolare sul momento della quantità di moto

Dimostriamo entrambe le affermazioni.

*Conservazione del momento della quantità di moto*

Le equazioni del moto si ottengono introducendo l'informazione (ED.32) nella seconda delle equazioni (ED.13), ottenendo:

$$\dot{\mathbf{K}}_{\Omega} = 0 \quad (\text{ED.33})$$

E quindi:

$$\mathbf{K}_{\Omega} = \text{costante}$$

*Conservazione dell'energia cinetica*

Per mostrare che l'energia cinetica è un integrale primo del moto possiamo procedere in due modi.

## DIMOSTRAZIONE A

Partiamo dall'espressione dell'energia cinetica per un corpo rigido con un punto fisso:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_{\Omega}$$

avendo tenuto conto che, in un corpo rigido con un punto fisso:

$$\mathbf{K}_{\Omega} = \mathcal{I} \boldsymbol{\omega}$$

Ma abbiamo appena dimostrato che il momento della quantità di moto è un integrale primo, quindi, derivando l'energia cinetica rispetto al tempo avremo semplicemente:



$$\dot{T} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{K}_{\Omega} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{I}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

La matrice d'inerzia è simmetrica e quindi:

$$\mathcal{I}^T = \mathcal{I}$$

Dunque:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{ED.34})$$

Ora l'equazione del moto (ED.33) scritta nella forma esplicita:

$$\mathcal{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} = 0$$

ci permette di ottenere:

$$\mathcal{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{I} \boldsymbol{\omega}$$

che sostituita nella (ED.34) comporta:

$$\dot{T} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} = 0$$

per l'annullarsi del prodotto misto che contiene addirittura due vettori uguali.

Dunque:

$$\dot{T} = 0 \quad \iff \quad T = \text{costante}$$

## DIMOSTRAZIONE B

Un modo alternativo di giungere allo stesso risultato si basa sul teorema dell'energia cinetica, in base al quale:

$$dT = dL$$

Il problema si sposta allora nel dimostrare che il lavoro di tutte le forze agenti sul sistema è nullo. Abbiamo il seguente bilancio dei lavori:

$$dL = dL^{(e,a)} + dL^{(e,v)} + dL^{(i)}$$

Ora, grazie alla formula del lavoro per un sistema di forze agenti su un corpo rigido:

$$dL = \mathbf{R} \times d\Omega + \mathbf{M}_\Omega \times d\psi$$

il lavoro delle forze esterne attive si può scrivere:

$$dL^{(e,a)} = \mathbf{R}^{(e,a)} \times d\Omega + \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} \times d\psi$$

Ma  $\Omega$  è il punto fisso, per cui  $d\Omega = 0$  e il momento delle forze esterne attive è nullo, per l'ipotesi (ED.32). Dunque:

$$dL^{(e,a)} = 0$$

Il lavoro delle forze esterne vincolari si scrive:

$$dL^{(e,v)} = \mathbf{\Phi} \times d\Omega = 0$$

ed è nullo in quanto il punto di applicazione della reazione vincolare è il punto fisso.

Infine il lavoro delle forze interne, in un corpo rigido:

$$dL^{(i)} = \mathbf{R}^{(i)} \times d\Omega + \mathbf{M}_{\Omega}^{(i)} \times d\psi = 0$$

sappiamo che è nullo, perchè, per il terzo principio della dinamica, le forze interne costituiscono un sistema di coppie di braccio nullo, e quindi, il loro risultante e momento risultante sono nulli.

Dunque si conclude:

$$dL = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad dT = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T = \text{costante}$$

*Conseguenza*

Di conseguenza possiamo scrivere:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_{\Omega} = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{K}_{\Omega}| \cos \vartheta = \text{costante}$$

Quindi:

$$|\boldsymbol{\omega}| \cos \vartheta = \frac{2T}{|\mathbf{K}_{\Omega}|} = \text{costante}$$

grazie al fatto che sia  $T$  che  $\mathbf{K}_{\Omega}$  sono integrali primi del moto.

### **Considerazioni geometrico-cinematiche**

Nei moti alla Poinsot si dimostra anche che:

- *l'ellissoide d'inerzia di centro  $\Omega$ , durante il moto, rotola senza strisciare su un piano invariabile che si mantiene ortogonale a  $\mathbf{K}_\Omega$  e a distanza costante dal punto  $\Omega$ .*

Figura ED. 10: ellissoide d'inerzia nei moti alla Poinsot

Procediamo nella dimostrazione svolgendo i seguenti passi logici.

*primo passo*

Mostriamo anzitutto che: *il piano tangente all'ellissoide d'inerzia, nel punto d'intersezione con l'asse di istantanea rotazione, è normale al momento della quantità di moto.*

Consideriamo l'equazione dell'ellissoide d'inerzia che scriviamo:

$$f(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} \times \mathcal{I} \mathbf{x} - 1 = 0 \quad (\text{ED.35})$$

Ora, il piano tangente all'ellissoide d'inerzia in un suo punto, è ortogonale al gradiente della funzione  $f$  che caratterizza la superficie, essendo il gradiente sempre diretto come la normale alla superficie. E' facile verificare che:

$$\nabla f = 2 \mathcal{I} \mathbf{x}$$

Infatti, in notazione indicale abbiamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j \sigma_{jk} x_k - 1) = \sigma_{ik} x_k + x_j \sigma_{ji} = 2 \sigma_{ik} x_k$$

per la simmetria della matrice d'inerzia. D'altra parte a noi interessa il piano tangente all'ellissoide d'inerzia non in un punto qualunque, ma nel punto di intersezione con l'asse di istantanea rotazione, perciò dobbiamo scegliere  $\boldsymbol{x}$  nella direzione di questo asse, cioè di  $\boldsymbol{\omega}$ . Dobbiamo allora imporre:

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (\text{ED.36})$$

Segue allora:

$$\nabla f = 2\lambda \boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\omega} = 2\lambda \mathbf{K} \boldsymbol{\Omega}$$

Quindi la normale alla superficie è diretta come il momento della quantità di moto. Il piano tangente si mantiene normale al momento della quantità di moto, e quindi, essendo quest'ultimo un vettore costante, il piano tangente si mantiene sempre parallelo a se stesso.

*secondo passo*

Il secondo passo consiste nel verificare che *l'ellissoide d'inerzia rotola senza strisciare sul piano tangente*.

Questo è immediato, in quanto il punto di tangenza è un punto dell'asse di istantanea rotazione, quindi, istante per istante, è quel punto dell'ellissoide che ha velocità nulla; la velocità di trascinamento del punto di contatto, che per definizione coincide con la velocità di strisciamento è dunque nulla.

*terzo passo*

Rimane da dimostrare che *la distanza di  $\Omega$  dal piano tangente è invariabile.*

Si tratta di mostrare che tale distanza è un integrale primo.

Figura ED. 11: distanza del punto fisso dal piano tangente

Detto:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{K}_\Omega}{|\mathbf{K}_\Omega|}$$

il versore normale al piano, che coincide con il versore del momento della quantità di moto, la distanza di  $\Omega$  dal piano tangente è data da:

$$h = \mathbf{x} \times \mathbf{n} = \lambda \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \lambda |\boldsymbol{\omega}| \cos \vartheta$$

Ma la proiezione  $|\boldsymbol{\omega}| \cos \vartheta$  è costante per quanto visto in precedenza; rimane allora da determinare  $\lambda$  e mostrare che è costante. Inserendo la (ED.36) nell'equazione dell'ellissoide (ED.35) otteniamo:

$$\lambda^2 \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - 1 = 2\lambda^2 T - 1 = 0$$

Quindi:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2T}$$

Dunque:

$$h = \pm \frac{|\boldsymbol{\omega}| \cos \vartheta}{\sqrt{2T}} = \text{costante}$$

essendo rapporto di due integrali primi del moto. Si noti che esistono due soluzioni e quindi due piani paralleli tra loro ed equidistanti dal punto fisso sui quali l'ellissoide rotola senza strisciare.