DR. Dinamica relativa

Abbiamo finora affrontato la dinamica del punto riferita ad un osservatore inerziale; ora passiamo ad esaminare la dinamica del punto rispetto ad un osservatore in moto relativo qualunque rispetto ad un osservatore inerziale, e che quindi, in generale, risulterà essere *non inerziale.*

Come si è già visto in precedenza in statica, quando le forze dipendono solo dalla distanza tra il punto mobile P ed altri punti interagenti con esso, il vettore di forza rimane invariante nel passaggio da un osservatore che denominiamo *assoluto* e che supponiamo *inerziale,* ad un altro che denominiamo *relativo* e che risulta, generalmente non inerziale:

$$\boldsymbol{F}^{(a)} = \boldsymbol{F}^{(r)} = \boldsymbol{F}$$

Mentre l'accelerazione si trasforma secondo il teorema di Coriolis:

$$\boldsymbol{a}^{(a)} = \boldsymbol{a}^{(r)} + \boldsymbol{a}^{(\tau)} + \boldsymbol{a}^{(c)}$$

Dalla cinematica relativa sappiamo che l'*accelerazione di trascinamento* è data da:

$$\boldsymbol{a}^{(\tau)} = \boldsymbol{a}_{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega P - \omega^2 QP$$

e l'*accelerazione di Coriolis* vale:

$$\boldsymbol{a}^{(c)} = 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)}$$

Di conseguenza, introducendo queste leggi di trasformazione nell'equazione fondamentale della dinamica, valida rispetto all'osservatore inerziale:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(a)} = \boldsymbol{F}^{(a)}$$

otteniamo:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(r)} = \boldsymbol{F} - \,m\,\boldsymbol{a}^{(\tau)} - \,m\boldsymbol{a}^{(c)}$$

che si riscrive:

$$\boxed{m\,\boldsymbol{a}^{(r)} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{(\tau)} + \boldsymbol{F}^{(c)}} \tag{DR.1}$$

avendo introdotto la *forza di trascinamento*:

$$\boldsymbol{F}^{(\tau)} = -\,m\,\boldsymbol{a}^{(\tau)} \tag{DR.2}$$

come già si era fatto in statica, e in più la *forza di Coriolis:*

$$\boldsymbol{F}^{(c)} = -\,m\boldsymbol{a}^{(c)} \tag{DR.3}$$

Notiamo che in statica la forza di Coriolis non è presente in quanto la velocità relativa è nulla all'equilibrio relativo e quindi si annulla l'accelerazione di Coriolis.

• Notiamo che affinchè i due osservatori risultino entrambi simultaneamente inerziali, *occorre e basta* che essi si muovano di moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro.

Infatti:

— La condizione è *necessaria,* in quanto, affinchè i due osservatori siano simultaneamente inerziali devono annullarsi sia la forza di trascinamento che la forza di Coriolis, qualunque sia il moto del punto P. Questo equivale a richiedere che si annullino simultaneamente l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione di Coriolis. Ora l'accelerazione di Coriolis $2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)}$ si annulla qualunque sia il moto, cioè per qualunque $\boldsymbol{v}^{(r)}$ se e solo se:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv 0$$

identicamente. E questo equivale a dire che il moto deve essere traslatorio. Ma allora nell'accelerazione di trascinamento rimane solo il termine $\boldsymbol{a}_{\Omega}$ e occorre richiedere che anche questo si annulli. In questo modo il moto traslatorio risulta uniforme.

— La condizione è *sufficiente,* in quanto se il moto è traslatorio si ha $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ identicamente; e questo comporta l'annullarsi dell'accelerazione e quindi della forza di Coriolis. Inoltre, se è uniforme, anche l'accelerazione dell'origine Ω del sistema relativo è nulla; quindi l'accelerazione assoluta è uguale a quella relativa.

Teorema dell'energia cinetica

Se consideriamo il prodotto scalare della (DR.1) per $\boldsymbol{v}^{(r)}$ otteniamo:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(r)} \times \boldsymbol{v}^{(r)} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{F}^{(\tau)} \times \boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{F}^{(c)} \times \boldsymbol{v}^{(r)}$$

• La forza di Coriolis non compie lavoro. Infatti la potenza esplicata dalla forza di Coriolis vale:

$$W^{(c)} = \boldsymbol{F}^{(c)} \times \boldsymbol{v}^{(r)} = -\,2m\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{v}^{(r)} = 0$$

essendo sempre nullo il prodotto misto. Rimane allora il risultato:

$$\frac{dT}{dt} = W + W^{(\tau)}$$

essendo:

$$T = \frac{1}{2}\, m \left(v^{(r)}\right)^2, \qquad W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}^{(r)}, \qquad W^{(\tau)} = \boldsymbol{F}^{(\tau)} \times \boldsymbol{v}^{(r)}$$

Quando la forza di interazione $\boldsymbol{F}$ è conservativa e ha potenziale U si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}\,(T - U) = W^{(\tau)}$$

Notiamo che, in generale, questo non comporta alcun integrale primo dell'energia rispetto all'osservatore relativo, a causa della presenza della potenza della forza di trascinamento, che non è in genere conservativa. Tuttavia, sappiamo che la forza di trascinamento diviene conservativa quando il sistema relativo ruota uniformemente attorno ad un asse fisso. In questo caso la forza di trascinamento coincide con la forza centrifuga, che risulta essere conservativa e ha potenziale:

$$U_{centrif.} = \frac{1}{2}\, m\, r^2 \boldsymbol{\omega}^2$$

dove r rappresenta la distanza del punto mobile P dall'asse di rotazione. In questo caso esiste l'integrale primo dell'energia e si scrive:

$$T - U - U_{centrif.} = E \iff \frac{1}{2}\, m \,(v^{(r)})^2 - U - \frac{1}{2}\, m\, r^2 \boldsymbol{\omega}^2 = E \quad \text{(DR.4)}$$

Problema dei due corpi

Il problema dei due corpi è un tipico problema di dinamica relativa, nato nell'ambito della meccanica celeste studiando il moto dei pianeti, osservato dal sole, o di un satellite osservato dal pianeta; ritrovato poi nella meccanica atomica classica studiando il moto di un elettrone osservato dal nucleo.

Poniamo di voler studiare il moto di un pianeta, che schematizziamo con un punto materiale P, di massa m, rispetto ad un osservatore la cui origine si trova nel sole (osservatore relativo), anch'esso schematizzato come un punto S, di massa M. Rispetto ad un osservatore solidale con le stelle fisse (osservatore assoluto), che è inerziale, il sole si muove di moto accelerato; di conseguenza un osservatore la cui origine si trova nel sole non è inerziale.

Scelta degli assi

Osserviamo, poi, che esistono infinite possibili scelte degli assi cartesiani per un sistema la cui origine si trova nel sole; la scelta più conveniente è quella di prendere gli assi del riferimento relativo in modo che si mantengano sempre paralleli a quelli del sistema assoluto. In questo modo il sistema relativo, non inerziale, si muove di moto traslatorio rispetto a quello assoluto, inerziale.

Avendo effettuato questa scelta degli assi ne viene subito, di conseguenza, che l'accelerazione di trascinamento del pianeta coincide con l'accelerazione del sole rispetto all'osservatore assoluto e che l'accelerazione di Coriolis è nulla. Infatti, poichè i due sistemi di riferimento traslano l'uno rispetto all'altro, la velocità angolare risulta essere identicamente nulla:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

Inoltre l'origine del sistema relativo $\Omega \equiv S$. Quindi:

$$\boldsymbol{a}^{(\tau)} = \boldsymbol{a}_S, \qquad \qquad \boldsymbol{a}^{(c)} = 0$$

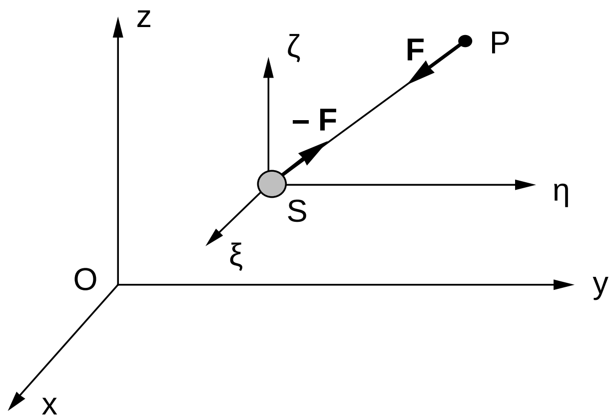

Figura DR. 1: osservatore assoluto e relativo nel problema dei due corpi

essendo $\boldsymbol{a}_S$ l'accelerazione del sole rispetto al sistema assoluto delle stelle fisse. Perciò le corrispondenti forze di trascinamento e di Coriolis sono date da:

$$\boldsymbol{F}^{(\tau)} = -\, m\, \boldsymbol{a}_S, \qquad\qquad \boldsymbol{F}^{(c)} = 0$$

Perciò l'equazione della dinamica relativa del pianeta rispetto al sistema solare si scrive:

$$m\, \boldsymbol{a}^{(r)} = \boldsymbol{F} - \, m\, \boldsymbol{a}_S \tag{DR.5}$$

Supposta conosciuta la forza di interazione $\boldsymbol{F}$, questo sistema contiene tuttavia ancora troppe incognite, in quanto, oltre al moto relativo del pianeta descritto dalla funzione vettoriale $\Omega P(t)$, che compare attraverso l'accelerazione relativa, è incognito anche il moto assoluto del sole dato da $OS(t)$, che compare attraverso l'accelerazione del sole rispetto alle stelle fisse. Possiamo eliminare, però, $\boldsymbol{a}_S$ scrivendo l'equazione della dinamica inerziale del sole rispetto alle stelle fisse:

$$M\,\boldsymbol{a}_S = -\,\boldsymbol{F}$$

tenendo conto che per il *principio di azione e reazione* la forza che il pianeta esercita sul sole è opposta alla forza che il sole esercita sul pianeta, e ha in comune con essa la retta d'azione che è la congiungente i due punti P ed S. Possiamo così ricavare:

$$\boldsymbol{a}_S = -\,\frac{\boldsymbol{F}}{M}$$

ed eliminare l'accelerazione del sole nella (DR.5) ottenendo:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(r)} = \boldsymbol{F} + \frac{m}{M}\,\boldsymbol{F}$$

Riscriviamo:

$$m^*\,\boldsymbol{a}^{(r)} = \boldsymbol{F} \qquad \text{(DR.6)}$$

avendo introdotto:

$$m^* = \frac{m}{1+\frac{m}{M}} = \frac{m\,M}{m+M} \qquad \text{(DR.7)}$$

A questa quantità si dà il nome di *massa ridotta* in quanto è evidentemente minore della massa di ciascuno dei due corpi e, in particolare della massa del pianeta.

• Notiamo che, grazie al principio di azione e reazione e alla scelta degli assi che abbiamo compiuto, la dinamica non inerziale di un punto si riconduce alla stessa legge della dinamica inerziale, a condizione di sostituire alla massa del punto mobile, la massa ridotta.

• La massa ridotta fornisce una misura quantitativa del grado di non inerzialità dell'osservatore relativo: infatti essa tende alla massa del pianeta m quando l'osservatore relativo tende a divenire inerziale; mentre si discosta da m tanto più quanto più grande è l'accelerazione sole, cioè quanto meno inerziale è l'osservatore relativo.

Ciò che determina l'entità della massa ridotta è il rapporto $\frac{m}{M}$ delle masse dei due corpi. Quando la massa m è molto piccola rispetto ad M il rapporto tende a zero e la massa ridotta tende ad m; se m tende ad uguagliare M, come può accadere nelle stelle doppie, la massa ridotta diviene la metà della massa m.

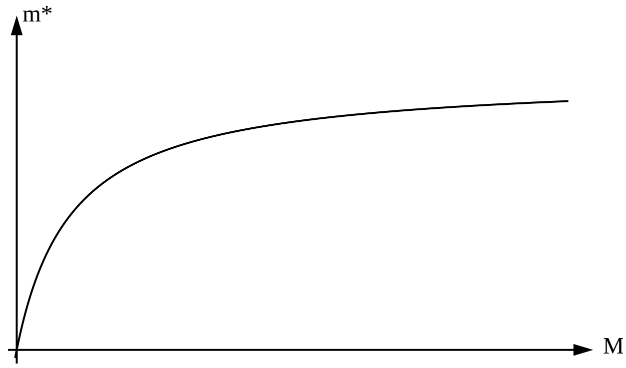

Figura DR. 2: andamento della massa ridotta al variare di M, con m fissato

Forza centrale

Scelti i sistemi di assi degli osservatori analizziamo le forze di interazione fra i due corpi: la prima informazione che ci viene dalla fisica è che la forza di interazione che il sole esercita sul pianeta è una *forza centrale* il cui centro risiede nel sole S, per cui vale la condizione:

$$SP \wedge \boldsymbol{F} = 0$$

Ma tramite la (DR.6) discende che:

$$SP \wedge \boldsymbol{a}^{(r)} = 0$$

E quindi il moto è centrale. Osserviamo che, grazie al fatto che la (DR.6) ha la stessa struttura dell'equazione fondamentale della dinamica inerziale, una forza centrale comporta, anche rispetto all'osservatore non inerziale, che il moto sia centrale.

Di conseguenza:

— Esiste l'*integrale primo delle aree* ovvero, per il moto del pianeta sussiste la *seconda legge di Keplero.* E cioè *il raggio vettore sole-pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.*

— Il moto essendo centrale è quindi piano e il piano della traiettoria è il piano che contiene i vettori velocità e posizione iniziale.

— Essendo nulla l'accelerazione areale è nulla anche l'accelerazione trasversale e quindi l'accelerazione è interamente radiale e si può fare uso della formula di Binet (CP.83) per esprimerla:

$$a_r = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}\right)$$

essendo $r = |SP|$.

Legge di forza

Sappiamo che la forza centrale che governa l'interazione sole-pianeta dipende dalla sola distanza r:

$$\boldsymbol{F} = F(r)\,\boldsymbol{u}$$

e la legge di forza è data dalla legge di gravitazione universale di Newton:

$$F(r) = -\,h\,\frac{M\,m}{r^2}$$

Introducendo queste ulteriori informazioni nell'equazione differenziale del moto (DR.6) otteniamo:

$$-m^*\,\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}\right) = -\,h\,\frac{M\,m}{r^2}$$

Possiamo riscrivere, semplificando:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \qquad \text{(DR.8)}$$

dove abbiamo introdotto la costante:

$$p = \frac{m^* c^2}{h\,M\,m} = \frac{c^2}{h\,(M+m)} \qquad \text{(DR.9)}$$

Integrazione della traiettoria

L'equazione differenziale (DR.8) non contiene il tempo, ma rappresenta l'equazione per la traiettoria in coordinate polari, caratterizzata dalla funzione incognita $r = r(\vartheta)$. Per procedere all'integrazione della traiettoria, introduciamo la variabile di comodo:

$$\chi = \frac{1}{r}$$

e riscriviamo la (DR.8) nella forma più leggibile:

$$\chi'' + \chi = \frac{1}{p} \tag{DR.10}$$

dove l'apice denota la derivata rispetto a ϑ. La (DR.10) è un'equazione del secondo ordine, lineare, non omogenea, la cui omogenea associata è identica all'equazione di un moto armonico di pulsazione unitaria, con l'unica differenza che in luogo del tempo t, compare l'angolo ϑ:

$$\chi'' + \chi = 0 \tag{DR.11}$$

Sappiamo che l'integrale generale $\chi(\vartheta)$ dell'equazione non omogenea (DR.10) è dato dalla somma dell'integrale generale $\hat{\chi}(\vartheta)$ dell'equazione omogenea (DR.11) e di un integrale particolare $\chi_1(\vartheta)$ dell'equazione non omogenea:

$$\chi(\vartheta) = \hat{\chi}(\vartheta) + \chi_1(\vartheta)$$

Abbiamo già integrato un'equazione del tipo (DR.11) trattando l'oscillatore armonico e sappiamo che:

$$\hat{\chi}(\vartheta) = A\, cos\,(\vartheta + \gamma)$$

dove A e γ dipendono dalle condizioni iniziali che si assegnano per $\vartheta = 0$. In particolare, osserviamo che l'angolo γ rappresenta l'angolo che il raggio vettore SP forma con l'orientazione positiva delle ascisse, in corrispondenza del valore iniziale $\vartheta = 0$ e può essere reso nullo scegliendo opportunamente, volta per volta, gli assi cartesiani xy nel piano del moto. In questo caso abbiamo l'ulteriore semplificazione:

$$\hat{\chi}(\vartheta) = A\, cos\, \vartheta$$

Per quanto riguarda la determinazione di un integrale particolare dell'equazione non omogenea, l'identificazione più semplice, quando il termine di non omogeneità è costante come nel nostro caso, è di scegliere una *funzione test* costante:

$$\chi_{test} = C \qquad \Longrightarrow \qquad \chi''_{test} = 0$$

E quindi si ha immediatamente:

$$\chi_1(\vartheta) = C = \frac{1}{p}$$

Abbiamo finalmente l'integrale generale della (DR.10), con la scelta degli assi specificata:

$$\chi(\vartheta) = A\,cos\,\vartheta + \frac{1}{p}$$

E' conveniente introdurre:

$$e = p\,A \tag{DR.12}$$

in modo da ottenere:

$$\chi(\vartheta) = \frac{1 + e\,cos\,\vartheta}{p}$$

Ritornando alla variabile originaria abbiamo l'equazione della traiettoria in coordinate polari:

$$r = \frac{p}{1 + e\,cos\,\vartheta} \tag{DR.13}$$

Questa è l'equazione di una *conica* della quale S è uno dei fuochi. La costante e rappresenta l'*eccentricità* della conica: per i pianeti la traiettoria è sempre chiusa (*orbita*) ed è perciò un'ellisse; si ha quindi $e < 1$.

E' stata allora ottenuta la prima legge di Keplero: *le orbite dei pianeti sono delle ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi.*

Integrale primo dell'energia

La forza gravitazionale, essendo una forza centrale dipendente dalla sola distanza del punto P dal centro di forza, è una forza conservativa e il suo potenziale vale:

$$U(r) = h\,\frac{M\,m}{r}$$

Di conseguenza esiste l'integrale primo dell'energia che si scrive:

$$\frac{1}{2}\,m^{*}v^{2} - h\,\frac{M\,m}{r} = E \tag{DR.14}$$

Questo rappresenta un integrale primo per il problema di dinamica relativa (DR.6) per questo in esso compare la massa ridotta m^{*} in luogo della massa m del pianeta; con v si intende la velocità relativa del pianeta. E' possibile riscrivere l'integrale primo dell'energia in maniera da stabilire un legame tra l'energia meccanica E del sistema, che dipende dalle condizioni iniziali del moto, e l'eccentricità e dell'orbita. Per fare questo utilizziamo la formula stabilita per i moti centrali (CP.84):

$$v^{2} = c^{2}\,\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^{2} + \frac{1}{r^{2}}\right]$$

nella quale sostituiamo le informazioni che provengono dalla conoscenza della traiettoria del moto (DR.13):

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\, cos\, \vartheta}{p} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta} = -\,\frac{e}{p}\, sen\, \vartheta$$

Di conseguenza si ottiene:

$$v^2 = \frac{c^2}{p^2}\,(e^2 + 1 + 2e\, cos\, \vartheta)$$

Esprimiamo poi:

$$e\, cos\, \vartheta = \frac{p}{r} - 1$$

ottenendo:

$$v^2 = \frac{c^2}{p^2}\,(e^2 - 1) + 2\,\frac{c^2}{p\, r}$$

E finalmente, tenendo conto della definizione di p, possiamo riscrivere:

$$v^2 = \frac{c^2}{p^2}\,(e^2 - 1) + 2h\,\frac{M\, m}{m^*\, r} \tag{DR.15}$$

Informazione che, inserita nell'integrale primo dell'energia (DR.14) fornisce il legame tra l'energia meccanica e l'eccentricità:

$$E = \frac{m^*\, c^2}{2\, p^2}\,(e^2 - 1) \tag{DR.16}$$

Si ha così la tabella seguente riguardante le traiettorie del moto di un corpo celeste nel campo di gravitazione del sole:

$$\begin{cases} E < 0 & (sistema\ legato) & e < 1 & (ellisse) \\ E = 0 & (sistema\ non\ legato) & e = 1 & (parabola) \\ E > 0 & (sistema\ non\ legato) & e > 1 & (iperbole) \end{cases}$$

Un pianeta si trova sempre legato al sole e la sua orbita è ellittica, per cui l'energia meccanica, risulta negativa. Le comete possono invece realizzare i tre casi potendo essere legate (comete periodiche) o non legate al sole. Il caso della traiettoria parabolica è un caso limite tra i restanti due casi.

Considerando poi il limite per $r \to +\infty$ nell'integrale primo dell'energia (DR.14) otteniamo:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2\,E}{m^*}}$$

— Se $E > 0$ il corpo P giunge a distanza molto grande da S avendo una quantità residua di energia cinetica e possiede perciò una velocità all'infinito non nulla che gli permette di sfuggire dal campo gravitazionale di S.

— Se $E = 0$ il corpo P giunge a distanza molto grande da S avendo speso tutta la sua energia cinetica per vincere l'attrazione gravitazionale e possiede perciò una velocità all'infinito nulla, e non risente più dell'attrazione gravitazionale.

— Se $E < 0$ il corpo P si muove in una regione limitata dello spazio, si dice perciò che è *legato* ad S, e non può giungere all'infinito non avendo a disposizione una energia cinetica sufficiente a vincere l'attrazione gravitazionale. Notiamo che il limite della velocità per $r \to +\infty$ in questo caso risulta immaginario.

Terza legge di Keplero

La terza legge di Keplero, secondo la quale *il rapporto fra il quadrato del periodo e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è una costante identica per tutti i pianeti del sistema solare,* cioè:

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

è in realtà una legge approssimata e non esatta. Possiamo infatti calcolare K, per un pianeta, partendo dall'integrale primo delle aree. La velocità areale, essendo costante, è uguale al rapporto dell'area dell'ellisse e del periodo, e quindi la costante delle aree che è il doppio della velocità areale si può scrivere:

$$c = 2\,\frac{Area_{ellisse}}{periodo} = \frac{2\pi\, a\, b}{T}$$

avendo denotato con a e b i semiassi maggiore e minore dell'orbita ellittica. D'altra parte in un'ellisse i due semiassi sono legati dalla relazione:

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

Possiamo poi esprimere a in termini di p e di e, tenendo conto che l'asse maggiore, di lunghezza $2a$ si può esprimere come somma della minima e della massima distanza di P da S:

$$2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{p}{1-e^2} \tag{DR.17}$$

Quindi:

$$b^2 = \frac{p^2}{1-e^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{b^2}{a} = p$$

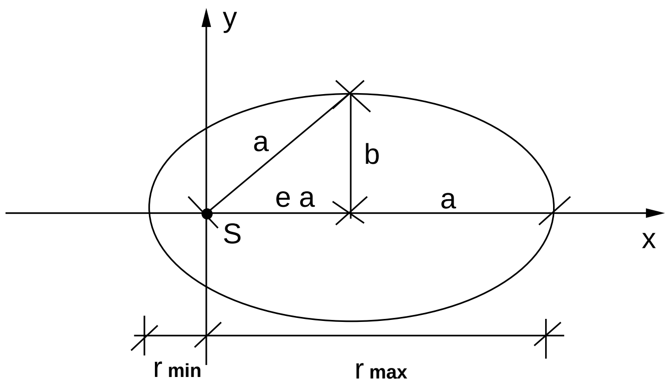

Figura DR. 3: orbita ellittica di un pianeta

Allora possiamo esprimere:

$$c^2 = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{T^2}\frac{b^2}{a} = \frac{4\,\pi^2 a^3 p}{T^2}$$

E quindi:

$$K = \frac{4\,\pi^2 p}{c^2}$$

Introducendo poi la definizione di p (DR.9) si ha:

$$K = \frac{4\,\pi^2}{h\,(M+m)} \tag{DR.18}$$

Si osserva che solo a condizione che la massa del pianeta sia trascurabile rispetto alla massa del sole ($m \ll M$) la costante K è indipendente dal pianeta, ed è la stessa per tutti i pianeti del sistema solare. Questa condizione, di fatto, entro gli errori di misura, si può ritenere abbastanza buona per tutti i pianeti; l'errore più sensibile riguarda Giove che la cui massa è più elevata degli altri pianeti.

Legge oraria del moto

La legge oraria del moto per il problema dei due corpi si può ottenere con il metodo delle quadrature, partendo dall'integrale primo dell'energia (DR.14) nel quale introduciamo l'espressione polare della velocità:

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{u} + r\,\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{w}$$

nella quale possiamo eliminare $\dot{\vartheta}$ tramite l'integrale delle aree. Abbiamo:

$$c = r^2\,\dot{\vartheta} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\vartheta} = \frac{c}{r^2}$$

E quindi:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\vartheta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}$$

Allora l'integrale primo dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}\,m^*\left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) - h\,\frac{M\,m}{r} = E$$

Alla funzione:

$$U_{eff.} = h\,\frac{M\,m}{r} - \frac{m^* c^2}{2\,r^2} \qquad \text{(DR.19)}$$

si dà il nome di *potenziale efficace.*

Il problema si porta a quadrature separando le variabili:

$$t = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{d\hat{r}}{\sqrt{\frac{2}{m^*}\left(E + h\,\frac{M\,m}{\hat{r}}\right) - \frac{c^2}{\hat{r}^2}}} \tag{DR.20}$$

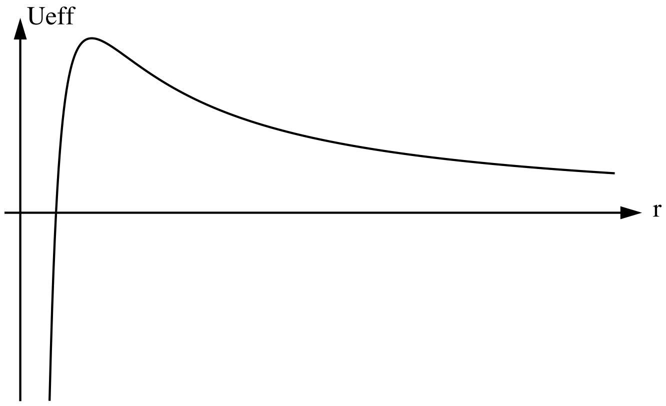

Figura DR. 4: andamento del potenziale efficace

Velocità di fuga

Qual è la velocità minima che occorre imprimere ad un satellite perchè possa sfuggire dal campo di gravitazione terrestre, allontanandosi indefinitamente dalla terra? Si può dare una stima di questa velocità, che viene detta *velocità di fuga,* scrivendo l'integrale primo dell'energia (DR.14) per il moto del satellite. In questo caso M indicherà la massa terrestre e m la massa del satellite. Supponiamo di far partire il satellite immediatamente al di sopra dell'atmosfera da una distanza R dal centro della terra, che in prima approssimazione uguaglia il raggio terrestre; in modo da non dover tener conto della resistenza al moto dovuta alla presenza dell'atmosfera.

Allora, per allontanarsi indefinitamente dalla terra, il satellite deve percorrere una traiettoria aperta (non ellittica); in caso contrario rimarrebbe in orbita attorno alla terra. L'energia meccanica minima richiesta per compiere una traiettoria aperta è zero e la traiettoria corrispondente è parabolica. In questo caso l'integrale primo dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}\, m^*\, v_{fuga}^2 - h\, \frac{M\, m}{R} = 0$$

Da cui si ricava il modulo della velocità:

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2h\,(M+m)}{R}} \approx \sqrt{\frac{2h\, M}{R}} \tag{DR.21}$$

dal momento che la massa di un satellite artificiale è molto piccola rispetto alla massa terrestre.

Deviazione dei gravi verso oriente

Un altro problema classico di dinamica relativa del punto è costituito dallo studio del moto di un grave in caduta libera sulla superficie terrestre, quando si tenga conto che il sistema terrestre non è inerziale a causa della rotazione propria della terra attorno al proprio asse. In questo caso nascono degli effetti misurabili, anche se di piccola entità, dovuti alla forza di Coriolis. Il più rilevante di questi effetti è una deviazione dalla verticale con uno spostamento verso oriente del punto di caduta del grave.

Scegliamo il sistema di assi dell'osservatore assoluto con l'origine nel centro della terra e assi diretti verso le stelle fisse, trascurando la traslazione della terra attorno al sole, i cui effetti, nel breve tempo del moto di un grave, risultano irrilevanti rispetto agli effetti dovuti alla rotazione propria. Il sistema relativo lo scegliamo con l'origine nella posizione iniziale del grave $\Omega \equiv P_0$,

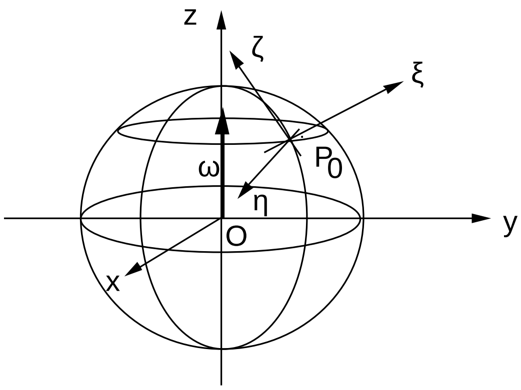

Figura DR. 5: deviazione dei gravi verso oriente: scelta degli assi

l'asse delle ascisse ξ tangente al parallelo passante per P_0 e rivolto verso oriente, l'asse η diretto come la verticale, cioè come $\boldsymbol{g}$ e orientato in senso concorde con $\boldsymbol{g}$ e, conseguentemente, l'asse ζ tangente al meridiano passante per P_0 e orientato verso nord.

L'equazione della dinamica relativa si scrive allora:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(r)} = m\,\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}^{(c)}$$

avendo incluso la forza di trascinamento nella definizione del peso che abbiamo dato in statica. Assumiamo che il moto si verifichi in una regione sufficientemente limitata dello spazio, in modo da poter considerare il vettore $\boldsymbol{g}$ come costante. Esplicitando la forza di Coriolis ed eliminando la massa otteniamo:

$$\boldsymbol{a}^{(r)} = \boldsymbol{g} - 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)} \qquad \text{(DR.22)}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare, costante, con cui la terra ruota attorno al proprio asse.

Possiamo introdurre la decomposizione dei vettori rispetto agli assi del sistema relativo:

$$\Omega P \equiv (\xi, \eta, \zeta), \qquad \boldsymbol{v}^{(r)} \equiv (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}), \qquad \boldsymbol{a}^{(r)} \equiv (\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta})$$

$$\boldsymbol{g} \equiv (0, g, 0), \qquad \boldsymbol{\omega} \equiv (0, -\omega\, sen\, \alpha, \omega\, cos\, \alpha)$$

Con α si denota la latitudine, che è un angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, positivo nell'emisfero nord e negativo in quello sud.

Proiettando l'equazione (DR.22) sugli assi del sistema relativo otteniamo il sistema differenziale delle equazioni del moto relativo:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = 2\,\omega(\dot{\zeta}\, sen\, \alpha + \dot{\eta}\, cos\, \alpha) \\ \ddot{\eta} = g - 2\,\omega\, \dot{\xi}\, cos\, \alpha \\ \ddot{\zeta} = -\,2\,\omega\, \dot{\xi}\, sen\, \alpha \end{cases} \tag{DR.23}$$

dove il punto denota qui la derivata relativa. Le condizioni iniziali per la caduta libera e con la scelta dell'origine degli assi che abbiamo fatto si scrivono:

$$\begin{cases} \xi(0) = 0, \qquad \eta(0) = 0, \qquad \zeta(0) = 0 \\ \dot{\xi}(0) = 0, \qquad \dot{\eta}(0) = 0, \qquad \dot{\zeta}(0) = 0 \end{cases} \tag{DR.24}$$

Possiamo riscrivere la seconda e la terza equazione rispettivamente nella forma:

$$\frac{d^{(r)}}{dt}\,(\dot{\eta} - g\,t + 2\,\omega\xi\ cos\, \alpha) = 0$$

$$\frac{d^{(r)}}{dt}\,(\dot{\zeta} + 2\,\omega\,\xi\,sen\,\alpha) = 0$$

Da queste è immediato ottenere, tenendo conto delle condizioni iniziali:

$$\dot{\eta} = g\,t - 2\,\omega\xi\;cos\,\alpha \tag{DR.25}$$

$$\dot{\zeta} = -2\,\omega\,\xi\,sen\,\alpha \tag{DR.26}$$

Risultati che, sostituiti nella prima equazione del sistema (DR.23) conducono a un'equazione per la sola variabile ξ:

$$\ddot{\xi} + 4\omega^2\xi = 2\,g\,\omega\,t\;cos\,\alpha \tag{DR.27}$$

L'integrale generale $\xi(t)$ di questa equazione lineare non omogenea si ottiene come somma dell'integrale generale $\hat{\xi}(t)$ dell'equazione omogenea associata:

$$\ddot{\xi} + 4\omega^2\xi = 0 \tag{DR.28}$$

e di un integrale particolare $\xi_1(t)$ dell'equazione non omogenea:

$$\xi(t) = \hat{\xi}(t) + \xi_1(t)$$

La (DR.28) si presenta come l'equazione di un moto armonico di pulsazione $2\,\omega$ e quindi il suo integrale generale è dato da:

$$\hat{\xi}(t) = A\,cos\,(2\,\omega\,t + \gamma)$$

Un integrale particolare della (DR.27) si può ottenere mediante una *funzione test* lineare:

$$\xi_{test} = a\,t + b$$

Sostituendo nella (DR.27) otteniamo:

$$4\omega^2(a\,t + b) = 2\,g\,\omega\,t\,cos\,\alpha$$

Dovendo essere soddisfatta $\forall t$, la condizione precedente conduce alle identificazioni:

$$a = \frac{g}{2\,\omega}\,cos\,\alpha, \qquad\qquad b = 0$$

Quindi:

$$\xi_1(t) = \frac{g\,t}{2\,\omega}\,cos\,\alpha$$

Rimane allora determinato l'integrale dell'equazione (DR.27):

$$\xi(t) = A\,cos\,(2\,\omega\,t + \gamma) + \frac{g\,t}{2\,\omega}\,cos\,\alpha \tag{DR.29}$$

Imponendo le condizioni iniziali determiniamo A e γ:

$$\begin{cases} A\,cos\,\gamma = 0 \\ \\ 2\,\omega\,A\,sen\,\gamma - \frac{g}{2\,\omega}\,cos\,\alpha = 0 \end{cases}$$

Da queste, tenendo conto che A è positivo, ricaviamo:

$$A = \frac{g}{4\omega^2}\, cos\,\alpha, \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Finalmente abbiamo:

$$\xi(t) = \frac{g\, cos\,\alpha}{4\omega^2}\,(2\,\omega\, t - sen\, 2\,\omega\, t) \tag{DR.30}$$

E' possibile poi ricavare anche $\eta(t)$ e $\zeta(t)$ mediante le (DR.25) e (DR.26).

Quello che interessa qui osservare è che il grave non cade lungo la verticale, come ci si aspetterebbe se il sistema terrestre fosse inerziale, e cioè non si ha $x = 0, y = 0$, ma esiste una deviazione dalla verticale lungo l'asse x che è sempre non negativa, cioè verso oriente. Infatti riscrivendo la (DR.30) nella forma seguente risulta:

$$\xi(t) = \frac{g\, t\, cos\,\alpha}{2\,\omega}\left(1 - \frac{sen\, 2\,\omega\, t}{2\,\omega\, t}\right) \geq 0, \qquad \forall t \geq 0$$

grazie al fatto che:

$$\frac{sen\, x}{x} \leq 1, \qquad \forall x$$

Si osserva anche che essendo $\dot{\eta} \leq 0$ è presente anche una piccola deviazione verso l'equatore.