

## TF. Statica delle travi e dei fili

### Equilibrio delle travi

Una categoria di sistemi di punti materiali *continui* di particolare interesse è costituita dalle *travi* e dai *fili*.

Comunemente si definisce *trave* un *solido tubolare* in cui una dimensione lineare prevale su tutte le altre. Geometricamente una trave può essere generata facendo scorrere una figura piana (sezione della trave), con il suo baricentro, lungo una curva assegnata, che prende il nome di *direttrice* della trave, in modo da mantenersi punto per punto normale ad essa.

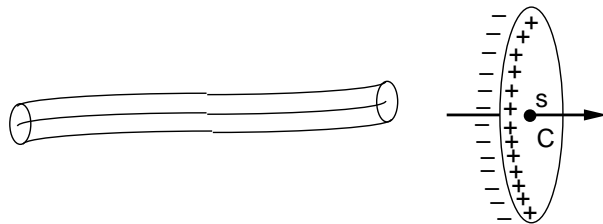


Figura TF. 1: trave

Di una trave è generalmente utile, come si comprende, lo studio della statica. Per lo studio dell'equilibrio di una trave si fa uso delle equazioni cardinali della statica che servono a determinare le reazioni vincolari agli appoggi o agli incastri, e gli sforzi e i momenti ai quali la struttura della trave viene sottoposta in conseguenza del suo peso e di eventuali carichi esterni. Se la trave in esame è un continuo deformabile, supposto l'equilibrio, si utilizzano le equazioni cardinali della statica come condizioni necessarie per l'equilibrio e da esse si cerca di ottenere le reazioni vincolari e le informazioni sugli sforzi e i momenti. Se la trave si può pensare come un corpo rigido,

allora le equazioni cardinali saranno anche sufficienti a garantire l'equilibrio. Bisognerà supporre rigida, comunque, almeno la sezione  $\sigma$  che genera la trave muovendosi lungo la direttrice, perchè ad essa si devono applicare i teoremi di riducibilità senza che ne venga alterato l'equilibrio della trave.

Considerata una sezione generica  $\sigma$  si definisce *pagina positiva* della sezione quella rivolta verso le ascisse crescenti e *pagina negativa* quella rivolta verso le ascisse decrescenti.

### *Classificazione delle forze*

Fissata un'ascissa curvilinea  $s$  sulla direttrice, si dà la seguente classificazione delle forze agenti sulla trave:

— *forze esterne*

Le forze esterne agenti sulla trave possono essere di due tipi:

i) *forze concentrate* o *forze di carico* le quali sono forze applicate in un numero finito di punti interni alla trave; queste si tabulano con un indice nel modo seguente:

$$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$$

e si assume che la loro retta d'azione passi per la direttrice, in modo che, mediante un'operazione elementare di scorrimento possono essere portate ad essere applicate a punti della direttrice.

ii) *forze distribuite*, cioè forze applicate ad ogni elemento infinitesimo di trave, come ad esempio il peso; queste si descrivono assegnando una legge di distribuzione differenziale del tipo:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{f}(s) ds$$

e si intendono applicate con continuità ai baricentri delle sezioni, cioè ai punti della direttrice.

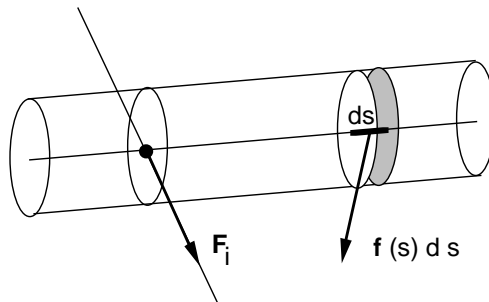


Figura TF. 2: forze esterne applicate ad una trave

— *forze interne*

Le forze interne ad una trave sono rappresentate dalle forze di interazione tra le particelle, che nascono in opposizione alle sollecitazioni esterne, per realizzare l'equilibrio della trave, e si chiamano *forze di contatto*. Esse sono applicate a tutti i punti di una generica sezione  $\sigma$ .

Applicando ad esse i *teoremi di riducibilità*, che non alterano l'equilibrio, in forza dell'ipotesi di rigidità della sezione, il sistema di vettori applicati costituito dalle forze interne, si può ridurre ad un vettore risultante, relativo alla sezione  $\sigma$ , che denotiamo con  $\mathbf{R}_\sigma$  e che prende il nome di *sforzo*, e ad una coppia di momento risultante  $\mathbf{M}_\sigma$ . Il momento risultante si intende, per definizione calcolato rispetto al polo  $C$ , baricentro della sezione  $\sigma$  che si sta considerando.

Per il principio di azione e reazione lo sforzo e il momento che le particelle affacciate sulla pagina negativa di una sezione esercitano sulle particelle affacciate sulla pagina positiva, risultano rispettivamente uguali ed opposti allo sforzo e al momento esercitati dalle particelle affacciate sulla pagina positiva nei confronti delle particelle affacciate sulla pagina negativa.

• *Convenzione sui segni.* Si conviene di apporre un segno positivo davanti agli sforzi e ai momenti esercitati dalla pagina negativa verso quella positiva e un segno negativo agli sforzi e ai momenti esercitati in senso opposto.

In questo modo il sistema di tutte le forze applicate alla trave viene ridotto, mediante operazioni elementari, ad un sistema di forze equivalente, applicate ai punti della direttrice. L'equilibrio della trave è così ricondotto all'equilibrio della direttrice.

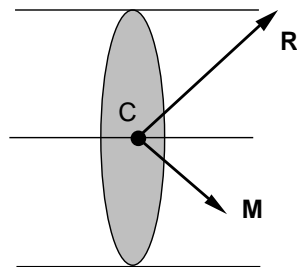


Figura TF. 3: riduzione delle forze interne ad una trave

Per completare la nomenclatura si definisce poi:

- *sforzo normale* la componente di  $\mathbf{R}_\sigma$  lungo la normale alla sezione  $\sigma$  ;
- *sforzo di taglio* la componente di  $\mathbf{R}_\sigma$  sul piano della sezione  $\sigma$  ;
- *momento torcente* la componente di  $\mathbf{M}_\sigma$  lungo la normale alla sezione  $\sigma$  ;
- *momento flettente* la componente di  $\mathbf{M}_\sigma$  sul piano della sezione  $\sigma$  .

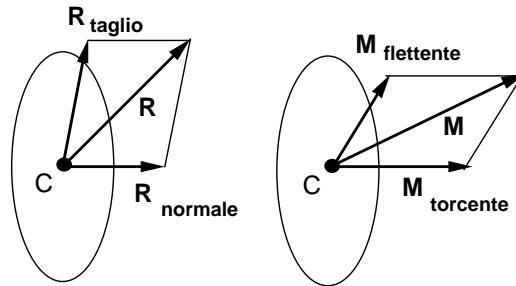


Figura TF. 4: decomposizione dello sforzo e del momento

#### *Equazioni delle travi in forma integrale*

Quando si studia l'equilibrio delle travi, generalmente interessa conoscere, oltre alle reazioni vincolari agli appoggi, anche gli sforzi e i momenti a cui la trave viene sottoposta a causa delle sollecitazioni esterne. Ma le equazioni cardinali della statica contengono solamente le forze esterne, mentre gli sforzi e i momenti sono originati dalle forze interne di mutua interazione. Per mettere in evidenza queste sollecitazioni interne bisogna scrivere le equazioni cardinali per un sottosistema che le vede come esterne, cioè per un tratto di trave compreso fra due generiche sezioni  $\sigma$  e  $\sigma'$ , anziché per la trave intera. In tal modo gli sforzi e i momenti, che le parti della trave escluse dal tratto considerato esercitano sul tratto esaminato, risultano sollecitazioni esterne rispetto a quel tratto.

Vediamo ora come specializzare le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(e)} = 0 \\ \mathbf{M}_{\Omega}^{(e)} = 0 \end{cases}$$

all'equilibrio di un tratto di trave, facendo uso delle notazioni e delle convenzioni appena introdotte.

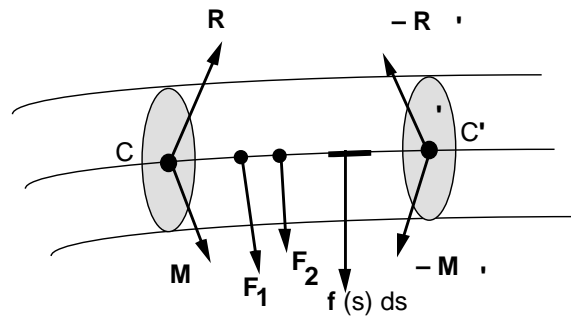


Figura TF. 5: tratto di trave compreso tra due sezioni generiche

Il vettore risultante delle forze esterne comprende tre contributi:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}_{carico} + \mathbf{R}_{distrib.} + \mathbf{R}_{contatto}$$

Il risultante delle forze di carico presenti nel tratto di trave considerato:

$$\mathbf{R}_{carico} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

dove la sommatoria si intende estesa alle forze i cui punti di applicazione si trovano inclusi nel tratto di trave compreso tra le due sezioni  $\sigma$  e  $\sigma'$ .

Il risultante delle forze distribuite si ottiene integrando la legge di distribuzione tra gli estremi  $s$  ed  $s'$  corrispondenti alle ascisse curvilinee delle sezioni  $\sigma$  e  $\sigma'$ :

$$\mathbf{R}_{distrib.} = \int_s^{s'} \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s}$$

Infine il risultante delle forze di contatto esterne al tratto di trave esaminato comprende i contributi dovuti alle interazioni delle particelle delle pagine

adiacenti alle sezioni estreme della trave, con anteposti i segni loro dovuti in forza della convenzione sui segni che abbiamo fatto:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\sigma - \mathbf{R}_{\sigma'}$$

Otteniamo allora la seguente specializzazione dell'equazione del risultante:

$$\mathbf{R}_\sigma - \mathbf{R}_{\sigma'} + \int_s^{s'} \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} + \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (\text{TF.1})$$

Per specializzare l'equazione dei momenti si procede in maniera analoga, facendo attenzione, in questo caso, che tutti i momenti vanno calcolati rispetto allo stesso polo. Di solito si conviene di scegliere come polo il baricentro  $C$  della sezione iniziale del tratto di trave esaminato, cioè della sezione estrema la cui ascissa curvilinea è minore. Allora il momento risultante si compone dei tre contributi:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{M}_{carico} + \mathbf{M}_{distrib.} + \mathbf{M}_{contatto}$$

Il momento delle forze di carico i cui punti di applicazione si trovano compresi nel tratto di trave considerato, che vale:

$$\mathbf{M}_{carico} = \sum_i CC_i \wedge \mathbf{F}_i$$

essendo  $C_i$  il baricentro della sezione  $\sigma_i$  al quale è applicata la forza di carico  $\mathbf{F}_i$ .

Il momento delle forze distribuite, dato dall'integrale dei momenti elementari, nel tratto di trave in questione:

$$\mathbf{M}_{distrib.} = \int_s^{s'} C\hat{C} \wedge \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s}$$

dove  $\hat{C} = C(\hat{s})$  è il centro della generica sezione, di ascissa curvilinea  $\hat{s}$ , variabile nel tratto di integrazione.

Il momento delle forze di contatto, riferito al polo  $C$ :

$$\mathbf{M}_{contatto} = \mathbf{M}_\sigma - \mathbf{M}_{\sigma'} - CC' \wedge \mathbf{R}_{\sigma'}$$

I segni sono scelti in modo da rispettare la convenzione e il prodotto vettoriale aggiuntivo è dovuto alla legge di distribuzione dei momenti, in quanto dobbiamo trasformare il momento  $\mathbf{M}_{\sigma'}$ , che per definizione è calcolato rispetto a  $C'$ , nel momento riferito al polo  $C$ .

Abbiamo così, finalmente, anche l'equazione dei momenti specializzata per le travi:

$$\mathbf{M}_\sigma - \mathbf{M}_{\sigma'} - CC' \wedge \mathbf{R}_{\sigma'} + \int_s^{s'} C\hat{C} \wedge \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} + \sum_i CC_i \wedge \mathbf{F}_i = 0 \quad (\text{TF.2})$$

Le equazioni:

$$\mathbf{R}_\sigma - \mathbf{R}_{\sigma'} + \int_s^{s'} \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} + \sum_i \mathbf{F}_i = 0$$

$$\mathbf{M}_\sigma - \mathbf{M}_{\sigma'} - CC' \wedge \mathbf{R}_{\sigma'} + \int_s^{s'} C\hat{C} \wedge \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} + \sum_i CC_i \wedge \mathbf{F}_i = 0$$



prendono il nome di equazioni di equilibrio delle travi in forma integrale.

### *Condizioni al contorno*

Il sistema delle equazioni delle travi, come è stato scritto, di per sè è staticamente indeterminato, in quanto supposte note le forze di carico e le forze distribuite, le forze di contatto sono generalmente incognite. Il problema possiede, nel caso più generale sei equazioni, per le dodici incognite date dalle componenti dei vettori degli sforzi e dei momenti.

Per poter determinare il problema bisogna conoscere un numero sufficiente di informazioni sulle forze di contatto in una o più sezioni della trave. Generalmente è possibile avere delle informazioni sulle sezioni agli estremi della trave in cui sono presenti dei vincoli (appoggi, incastri, ecc.) o dei carichi assegnati. Le informazioni assegnate su queste sezioni vengono dette *condizioni al contorno*. Se per esempio è possibile conoscere sia il risultante che il momento risultante su una sezione al contorno, si scrivono le equazioni delle travi per un tratto di trave compreso tra la sezione per la quale si danno le condizioni al contorno e una sezione generica. Restano così solamente sei incognite che si possono determinare mediante le sei equazioni.

- Osserviamo che la presenza di forze di carico rende discontinuo lo sforzo rispetto alla variabile  $s$  nei punti di applicazione di tali forze, mentre il momento risultante non viene reso discontinuo dalla presenza di forze di carico.

Per rendercene conto consideriamo un tratto di trave compreso tra due sezioni di ascisse curvilinee rispettive  $s$  ed  $s'$ , che includono il punto di applicazione  $C_0$  di ascissa curvilinea  $s_0$ , di una sola forza di carico  $F$ . Applicando il teorema della media agli integrali delle forze distribuite, possiamo scrivere le equazioni delle travi, per questo tratto di trave, nella forma:

$$R_\sigma - R_{\sigma'} + f(s^*)(s' - s) + F = 0$$

$$M_{\sigma} - M_{\sigma'} - CC' \wedge \mathbf{R}_{\sigma'} + CC'^{**} \wedge \mathbf{f}(s^{**}) + CC_0 \wedge \mathbf{F} = 0$$

essendo  $s^*$  e  $s^{**}$  valori di  $s$  tali che:

$$\int_s^{s'} \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} = \mathbf{f}(s^*)(s' - s), \quad \int_s^{s'} C\hat{C} \wedge \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} = CC'^{**} \wedge \mathbf{f}(s^{**})(s' - s)$$

Facendo tendere  $s$  ad  $s_{0-}$  e  $s'$  ad  $s_{0+}$  otteniamo che la discontinuità del risultante nel punto  $C_0$  è uguale alla forza di carico:

$$\mathbf{R}_{\sigma_{0+}} - \mathbf{R}_{\sigma_{0-}} = \mathbf{F}$$

dove evidentemente:

$$\mathbf{R}_{\sigma_{0\pm}} = \lim_{s \rightarrow s_{0\pm}} \mathbf{R}_{\sigma}$$

Mentre per i momenti si ottiene una discontinuità nulla e quindi la funzione  $M_{\sigma}$  risulta continua rispetto ad  $s$ .

### *Esempi*

Vediamo due problemi tipici di statica delle travi piane: il primo è dato dal problema della trave incastrata ad un estremo e soggetta ad un carico all'altro estremo, mentre il secondo è dato dall'equilibrio di una trave appoggiata ai suoi estremi, con una forza di carico in un punto intermedio.

*Trave incastrata a un estremo*

Consideriamo una trave rettilinea e omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  disposta orizzontalmente, incastrata all'estremo  $O$  e caricata all'estremo  $A$ , mediante un peso concentrato  $P$ . La trave è inoltre soggetta al proprio peso.

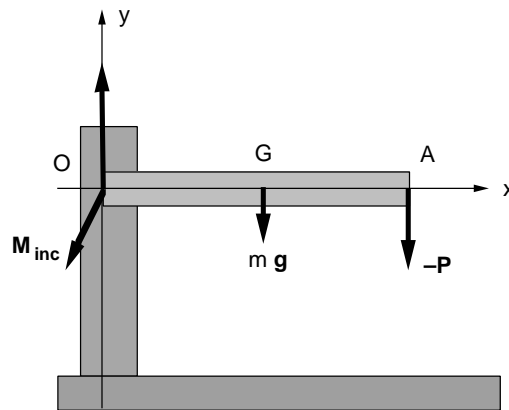


Figura TF. 6: trave incastrata a un estremo con carico al contorno

Determiniamo: i) la reazione vincolare  $\Phi$ , all'incastro e il momento  $M_{inc.}$  che l'incastro deve realizzare per mantenere in equilibrio la trave; ii) l'andamento dello sforzo e del momento delle forze di contatto al variare della sezione considerata lungo la trave. E' utile scegliere un sistema cartesiano, come in fig. (TF. 6) e identificare l'ascissa curvilinea  $s$  con l'ascissa cartesiana  $x$ .

i) *reazione vincolare e momento all'incastro*

Le condizioni al contorno si scrivono nel modo seguente:

$$R_O = \Phi, \quad M_O = M_{inc.}, \quad R_A = -P, \quad M_A = 0$$

avendo indicato con  $R_O$  lo sforzo relativo alla sezione iniziale, di centro  $O$ , che è uguale alla reazione vincolare incognita; con  $M_O$  il momento relativo alla stessa sezione, che uguaglia il momento incognito che l'incastro deve realizzare per mantenere in equilibrio la trave; con  $R_A$  lo sforzo relativo alla sezione estrema di centro  $A$  che uguaglia, a meno del segno introdotto sulla base della convenzione fatta, il carico concentrato  $P$ ; con  $M_A$  il momento relativo alla stessa sezione, che è nullo, in quanto non vengono applicati momenti al contorno, ma solamente una forza  $P$ , la quale ha momento nullo rispetto al centro della sezione alla quale viene applicata. La forza distribuita è la forza peso e la sua legge di distribuzione è caratterizzata dalla densità costante:

$$f(x) = \frac{mg}{\ell}$$

Per determinare la reazione vincolare e il momento all'incastro si scrivono le equazioni delle travi per l'intera trave:

$$\Phi + P + \int_0^\ell \frac{mg}{\ell} dx = 0$$

$$M_{inc.} + OA \wedge P + \int_0^\ell OC \wedge \frac{mg}{\ell} dx = 0$$

Da queste si ottiene immediatamente:

$$\Phi + P + mg = 0$$

$$M_{inc.} + OA \wedge P + OG \wedge mg = 0$$

dove  $G$  è il baricentro della trave. Infatti basta tenere conto del fatto che:

$$\int_0^\ell OC \wedge \frac{m\mathbf{g}}{\ell} dx = \left( \int_0^\ell \frac{m}{\ell} OC dx \right) \wedge \mathbf{g} = m OG \wedge \mathbf{g}$$

Rappresentando i vettori sugli assi cartesiani abbiamo:

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{P} = -P \mathbf{c}_2, \quad OA = \ell \mathbf{c}_1, \quad OG = \frac{1}{2} \ell \mathbf{c}_1$$

$$\Phi = \Phi_x \mathbf{c}_1 + \Phi_y \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{M}_{inc.} = M_{inc.} \mathbf{c}_3$$

Si ricava quindi:

$$\Phi_x = 0, \quad \Phi_y = mg + P, \quad M_{inc.} = \left( \frac{1}{2} mg + P \right) \ell$$

ii) *andamento dello sforzo e del momento*

Per determinare l'andamento dello sforzo e del momento al variare della sezione, cioè dell'ascissa  $x$ , lungo la trave, si scrivono le equazioni della trave per un tratto compreso tra una sezione estrema e una sezione generica  $\sigma$  di ascissa  $x$ . Per esempio consideriamo il tratto compreso tra la sezione generica e la sezione di centro  $A$ ; abbiamo:

$$\mathbf{R}_\sigma + \mathbf{P} + \int_x^\ell \frac{m\mathbf{g}}{\ell} dx = 0$$

$$\mathbf{M}_\sigma + OA \wedge \mathbf{P} + \int_x^\ell OC \wedge \frac{m\mathbf{g}}{\ell} dx = 0$$

Da queste ricaviamo:

$$\mathbf{R}_\sigma = -\mathbf{P} - \frac{m\mathbf{g}}{\ell} (\ell - x)$$

$$\mathbf{M}_\sigma = \left\{ P(\ell - x) + \frac{mg}{2\ell} (\ell - x)^2 \right\} \mathbf{c}_3$$

Notiamo che lo sforzo è interamente di taglio, e il momento è solo flettente. Introdotte, allora, le rappresentazioni:

$$\mathbf{R}_\sigma = R(x) \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{M}_\sigma = M(x) \mathbf{c}_3$$

si hanno le funzioni che descrivono l'andamento dello sforzo e del momento:

$$R(x) = \frac{mg}{\ell} (\ell - x) + P$$

$$M(x) = \frac{mg}{2\ell} (\ell - x)^2 + P(\ell - x)$$

Lo sforzo ha un andamento rettilineo, mentre il momento un andamento parabolico. Notiamo anche che, essendo assenti forze di carico interne alla trave, il risultante è una funzione continua.

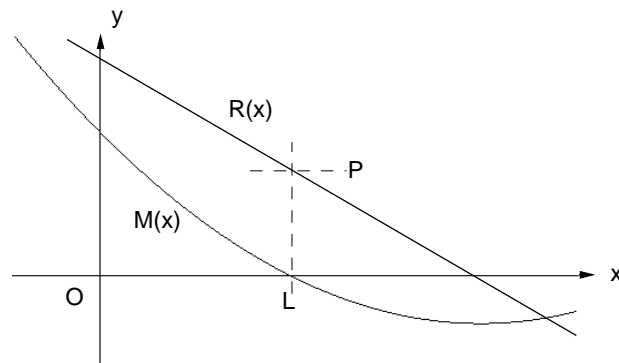


Figura TF. 7: andamento dello sforzo e del momento in una trave incastrata

*Trave appoggiata agli estremi*

Consideriamo ora una trave rettilinea e omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  disposta orizzontalmente, appoggiata ad entrambi gli estremi e caricata in un punto interno  $Q$ , mediante una forza concentrata verticale  $F$ . La trave è inoltre soggetta al proprio peso.

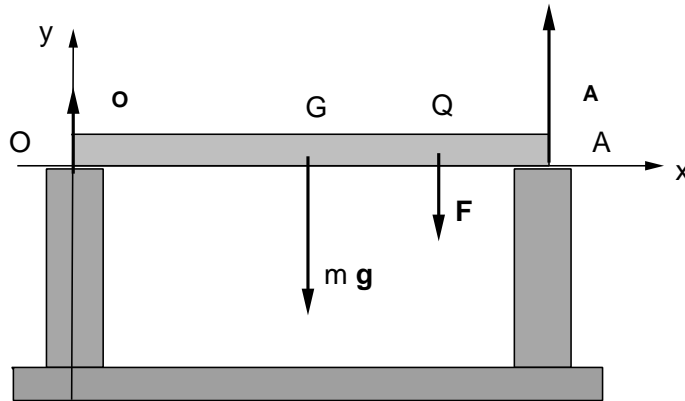


Figura TF. 8: trave appoggiata agli estremi con un carico concentrato

Ricerchiamo: i) le reazioni vincolari agli appoggi  $\Phi_O$  e  $\Phi_A$ ; ii) l'andamento dello sforzo e del momento delle forze di contatto al variare della sezione considerata lungo la trave. E' utile scegliere anche in questo caso il sistema cartesiano, come in fig. (TF. 8) e identificare l'ascissa curvilinea  $s$  con l'ascissa cartesiana  $x$ .

i) *reazioni vincolari agli appoggi*

Le condizioni al contorno si scrivono ora nel modo seguente:

$$\mathbf{R}_O = \Phi_O, \quad M_O = 0 \quad \mathbf{R}_A = -\Phi_A, \quad M_A = 0$$

Gli appoggi vengono considerati cerniere puntiformi, che sono in grado di esplicitare delle reazioni vincolari, ma non dei momenti, a differenza degli incastrati.

Per determinare le reazioni vincolari, come nel caso precedente, si scrivono le equazioni di equilibrio per l'intera trave:

$$\Phi_O + \Phi_A + \int_0^\ell \frac{mg}{\ell} dx + \mathbf{F} = 0$$

$$OA \wedge \Phi_A + \int_0^\ell OC \wedge \frac{mg}{\ell} dx + OQ \wedge \mathbf{F} = 0$$

Indicando con  $a$  l'ascissa del punto di applicazione  $Q$  della forza di carico, e sviluppando otteniamo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{Ox} + \Phi_{Ax} = 0 \\ \Phi_{Oy} + \Phi_{Ay} - mg - F = 0 \\ \ell \Phi_{Ay} - \frac{1}{2} mgl - aF = 0 \end{array} \right.$$

che risulta in genere staticamente indeterminato, in quanto contiene quattro incognite mentre le equazioni sono soltanto tre. Si riescono a determinare solamente le componenti  $y$  delle reazioni vincolari. Per determinare completamente il sistema occorre fare qualche ipotesi sui vincoli, per esempio, assumere che uno dei due appoggi, poniamo  $O$  sia costituito, anzichè da una cerniera puntiforme, da una piccola superficie piana priva di attrito, disposta orizzontalmente, in modo che la reazione vincolare in quel punto, sia normale alla superficie di appoggio, e quindi:

$$\Phi_{Ox} = 0$$

Questo comporta nel sistema precedente la possibilità di determinare le incognite, ottenendo:



$$\begin{cases} \Phi_{Ax} = 0 \\ \Phi_{Oy} = \frac{1}{2} mg + \frac{\ell-a}{\ell} F \\ \Phi_{Ay} = \frac{1}{2} mg + \frac{a}{\ell} F \end{cases}$$

ii) *andamento dello sforzo e del momento*

Per determinare l'andamento dello sforzo e del momento delle forze di contatto, in questo caso, scriviamo le equazioni di equilibrio per un tratto di trave compreso tra la sezione di centro  $O$  e una sezione generica  $\sigma$ , di ascissa  $x$ :

$$\Phi_O - \mathbf{R}_\sigma + \int_0^x \frac{m\mathbf{g}}{\ell} d\hat{x} + H(a) \mathbf{F} = 0$$

$$-M_\sigma - OC \wedge \mathbf{R}_\sigma + \int_0^x OC \wedge \frac{m\mathbf{g}}{\ell} d\hat{x} + H(a) OQ \wedge \mathbf{F} = 0$$

dove abbiamo fatto uso della funzione gradino di Heavyside:

$$H(a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

Anche in questo caso lo sforzo risulta essere interamente di taglio e il momento solo flettente. Seguono le funzioni che descrivono gli andamenti:

$$R(x) = \frac{\ell - 2x}{2\ell} mg + \left\{ \frac{\ell - a}{\ell} - H(a) \right\} F$$

$$M(x) = \frac{x^2 - \ell x}{2\ell} mg + \frac{a - \ell}{\ell} x F + H(a) (x - a) F$$

La presenza della funzione gradino evidenzia la discontinuità dello sforzo, mentre il momento risulta essere una funzione continua in  $a$ .

### *Equazioni delle travi in forma differenziale*

La presenza delle forze di carico determina, come abbiamo visto una discontinuità dello sforzo: di conseguenza, nei punti in cui sono presenti delle forze di carico lo sforzo non è una funzione differenziabile. Al contrario quando non vi sono forze di carico, è legittimo assumere che lo sforzo, come pure il momento, oltre ad essere funzioni continue, siano anche differenziabili rispetto ad  $s$  lungo l'intera trave. Sotto queste ipotesi è possibile passare dalla formulazione integrale delle equazioni di equilibrio ad una formulazione differenziale.

Possiamo infatti riscrivere le equazioni di equilibrio delle travi in forma di rapporti incrementali:

$$\frac{\mathbf{R}_{\sigma'} - \mathbf{R}_{\sigma}}{s' - s} - \frac{1}{s' - s} \int_s^{s'} \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} = 0$$

$$\frac{\mathbf{M}_{\sigma'} - \mathbf{M}_{\sigma}}{s' - s} - \left( \frac{CC'}{s' - s} \right) \wedge \mathbf{R}_{\sigma'} - \frac{1}{s' - s} \int_s^{s'} C\hat{C} \wedge \mathbf{f}(\hat{s}) d\hat{s} = 0$$

Facendo uso del teorema della media per eliminare i due integrali e semplificando, otteniamo:

$$\frac{\mathbf{R}_{\sigma'} - \mathbf{R}_{\sigma}}{s' - s} - \mathbf{f}(s^*) = 0$$

$$\frac{\mathbf{M}_{\sigma'} - \mathbf{M}_{\sigma}}{s' - s} + \left( \frac{CC'}{s' - s} \right) \wedge \mathbf{R}_{\sigma'} - CC^{**} \wedge \mathbf{f}(s^{**}) = 0$$

Passando al limite per  $s' \rightarrow s$ , avendo assunto che le funzioni siano differenziabili rispetto ad  $s$ , otteniamo le equazioni differenziali delle travi:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}_\sigma}{ds} - \mathbf{f}(s) &= 0 \\ \frac{d\mathbf{M}_\sigma}{ds} + \mathbf{T} \wedge \mathbf{R}_\sigma &= 0 \end{aligned} \quad (\text{TF.3})$$

Riconosciamo nel vettore:

$$\mathbf{T} = \lim_{s' \rightarrow s} \frac{CC'}{s' - s}$$

il versore tangente alla direttrice della trave.

### *Equilibrio dei fili*

La schematizzazione adottata per descrivere le travi all'equilibrio, può essere specializzata ulteriormente per trattare la statica dei fili.

Per *filo* intendiamo un particolare tipo di trave che soddisfa a due proprietà:

— *il momento delle forze di contatto è identicamente nullo:*

$$\mathbf{M}_\sigma \equiv 0 \quad (\text{TF.4})$$

— *lo sforzo ha carattere di tensione:*

Questa seconda proprietà si può esprimere matematicamente, tenendo conto della convenzione sui segni, mediante le condizione:

$$\mathbf{R}_\sigma \times \mathbf{T} \leq 0 \quad (\text{TF.5})$$

A differenza di una trave un filo *ideale* non ha una struttura interna capace di realizzare un momento di torsione o di flessione del filo; inoltre reagisce solo alle sollecitazioni che lo tendono, mentre non offre risposta alle sollecitazioni di pressione esercitate sulle sue sezioni.

Se non sono presenti forze di carico sul filo, il suo equilibrio può essere descritto ricorrendo alle equazioni differenziali delle travi, specializzate tenendo conto delle informazioni che caratterizzano i fili, appena introdotte.

Dalla (TF.4) segue che anche la derivata del momento rispetto ad  $s$  è identicamente nulla:

$$\frac{dM_\sigma}{ds} = 0$$

Questa informazione introdotta nell'equazione differenziale del momento comporta:

$$\mathbf{T} \wedge \mathbf{R}_\sigma = 0$$

E da questa possiamo dedurre che lo sforzo è parallelo al versore tangente oppure è nullo; ovvero esiste una funzione scalare  $\lambda$  tale che:

$$\mathbf{R}_\sigma = \lambda \mathbf{T}$$

E inoltre, grazie alla (TF.5), otteniamo anche la condizione sul segno di  $\lambda$ :

$$\lambda \leq 0$$

A questo punto è comodo introdurre la *tensione*:

$$\tau = -\lambda \geq 0$$

ed esprimere lo sforzo in termini della tensione:

$$\mathbf{R}_\sigma = -\tau \mathbf{T} \quad (\text{TF.6})$$

Rimane allora solo da sostituire questa espressione dello sforzo nell'equazione differenziale degli sforzi, ottenendo l'equazione differenziale dei fili:

$$\frac{d(\tau \mathbf{T})}{ds} + \mathbf{f}(s) = 0 \quad (\text{TF.7})$$

Questa equazione è quella a cui si ricorre normalmente trattando la statica dei fili, perchè i fili non vengono generalmente sottoposti a carichi concentrati, come invece accade frequentemente per le travi. Se però è presente, in un punto, una forza di carico, come abbiamo visto per le travi, il risultante è discontinuo e l'entità della discontinuità uguaglia la forza di carico. Poichè lo sforzo è dato dalla (TF.6), nasce una discontinuità sia per  $\tau$  che per il versore tangente, che non è più definito nel punto di applicazione della forza di carico, ma solamente a destra e a sinistra di esso: una forza di carico crea un *punto angoloso* nel filo.

#### *Problemi di equilibrio dei fili*

Esistono due classi di problemi riguardanti l'equilibrio dei fili:

— La prima classe comprende quei problemi nei quali è nota la forma che il filo assume all'equilibrio ed è incognita la tensione. Si richiede perciò di determinare la tensione del filo conoscendo le forze esterne;

— La seconda classe comprende i problemi nei quali sono incognite sia la forma del filo all'equilibrio che la tensione. Si richiede di determinarle entrambe conoscendo le forze esterne.

### *Equazioni intrinseche dei fili*

La prima categoria di problemi si può trattare ricorrendo alle *equazioni intrinseche dei fili*. Esse si ottengono proiettando l'equazione differenziale per l'equilibrio di un filo (TF.7) sul triedro di Frenet della curva che rappresenta la forma del filo all'equilibrio. E' possibile riscrivere la (TF.7) sviluppando la derivata del prodotto:

$$\mathbf{T} \frac{d\tau}{ds} + \tau \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{f}(s) = 0$$

Ricordando che:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{N}$$

otteniamo:

$$\mathbf{T} \frac{d\tau}{ds} + \frac{\tau}{\rho} \mathbf{N} + \mathbf{f}(s) = 0$$

Proiettando sul triedro di Frenet si ottengono le *equazioni intrinseche dell'equilibrio di un filo*:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} + f_T(s) = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} + f_N(s) = 0 \\ f_B(s) = 0 \end{cases}} \quad (\text{TF.8})$$

nelle quali anche la forza è stata rappresentata sul triedro di Frenet:

$$\mathbf{f}(s) = f_T(s) \mathbf{T} + f_N(s) \mathbf{N} + f_B(s) \mathbf{B}$$

- Una osservazione di carattere generale nasce dalla terza equazione dalla quale si ha l'informazione che: all'equilibrio il filo si dispone sempre in modo tale che non vi sia forza distribuita lungo la binormale; ovvero in modo che il piano osculatore alla curva che rappresenta la forma del filo contenga la forza distribuita.

- Una seconda osservazione, immediata, riguarda l'equilibrio di un filo non soggetto a forze distribuite: esso si dispone lungo una retta e trasmette inalterata, da un capo all'altro, la tensione.

Infatti si ha:

$$f_T(s) = 0, \quad f_N(s) = 0, \quad f_B(s) = 0$$

e quindi le (TF.8) ci forniscono le nuove informazioni:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si ricava l'informazione:

$$\tau = \text{costante}$$

E quindi: il filo trasmette la tensione da un estremo all'altro in quanto la tensione sulla sezione iniziale e quella sulla sezione finale del filo sono identiche. Un filo può essere utilizzato per trasmettere una forza da un punto ad un altro dello spazio.

Dalla seconda, supposta non nulla la tensione del filo si ottiene:

$$C = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho} = 0$$

E cioè la curvatura del filo deve essere nulla: il filo si dispone lungo una retta. Quindi non solo la tensione, ma anche la direzione dello sforzo si mantiene inalterata lungo il filo.

### **Filo fortemente teso su una superficie**

Un'applicazione delle equazioni intrinseche si può fare esaminando l'equilibrio di un filo fortemente teso su una superficie fissa, conosciuta. In questo caso il filo si dispone lungo una curva appartenente alla superficie, che supponiamo conosciuta.

Dire che il filo è *fortemente teso sulla superficie* significa dire che le reazioni vincolari, esplicate dalla superficie che vincola la forma del filo, sono preponderanti rispetto alle altre forze esterne agenti sul filo, le quali risultano pertanto trascurabili. Risulta allora trascurabile, per esempio il peso del filo, e l'unica forza distribuita è rappresentata dalle reazioni vincolari che sono applicate con continuità nei punti del filo. Le reazioni vincolari sono così caratterizzabili mediante una legge di distribuzione differenziale:

$$d\Phi(s) = \phi(s) ds$$

e si ha allora che la forza distribuita agente sul filo è data da:



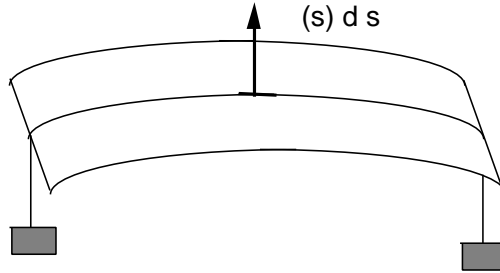


Figura TF. 9: filo fortemente teso su una superficie

$$\mathbf{f}(s) = \phi(s)$$

Sostituendo nelle (TF.8) segue:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} + \phi_T(s) = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} + \phi_N(s) = 0 \\ \phi_B(s) = 0 \end{cases} \quad (\text{TF.9})$$

dove:

$$\phi(s) = \phi_T(s) \mathbf{T} + \phi_N(s) \mathbf{N} + \phi_B(s) \mathbf{B}$$

Notiamo che il sistema appare staticamente indeterminato, in quanto contiene quattro incognite  $\phi_T, \phi_N, \phi_B, \tau$ , con sole tre equazioni. Per determinarlo occorrono delle informazioni sul vincolo.

Esaminiamo ora due possibilità:

i) *superficie priva di attrito*

Se la superficie è priva di attrito, la componente tangente della reazione vincolare è nulla e quindi le equazioni precedenti divengono:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} + \phi_N(s) = 0 \\ \phi_B(s) = 0 \end{cases} \quad (\text{TF.10})$$

Si ricavano le seguenti informazioni:

— Dalla prima equazione si ha:

$$\tau = \text{costante}$$

Dunque il filo trasmette la tensione inalterata da un capo all'altro. Notiamo che la tensione è uno scalare e rappresenta l'intensità dello sforzo, mentre non contiene informazioni sulla sua direzione, che è data dal versore tangente  $\mathbf{T}$ . Ciò che rimane costante lungo il filo è l'intensità dello sforzo che viene trasmessa inalterata, mentre la direzione dello sforzo viene modificata seguendo la tangente alla curva. Vincolando il filo a rimanere teso su una superficie conosciuta è possibile allora trasmettere una forza da un punto all'altro dello spazio, modificandone la direzione. L'utilizzo di cavi di trazione guidati da pulegge si basa su questo risultato.

— Dalla terza equazione ricaviamo che la componente binormale della reazione vincolare è sempre nulla. Ma non essendoci attrito anche la componente tangente è sempre nulla; dunque la reazione vincolare è tutta diretta lungo la normale principale alla curva secondo la quale il filo si dispone:

$$\phi(s) = \lambda \mathbf{N}$$

Essendo la superficie priva di attrito essa sarà capace poi di esplicitare solamente reazioni vincolari dirette lungo la normale alla superficie:

$$\phi(s) = \mu \mathbf{n}$$

essendo  $\mathbf{n}$  il versore normale alla superficie a cui aderisce il filo. Il confronto tra i due risultati ci dice che, all'equilibrio, il filo fortemente teso sulla superficie priva di attrito si dispone lungo una curva la cui normale principale  $\mathbf{N}$  risulta parallela alla normale alla superficie  $\mathbf{n}$  e cioè lungo una *geodetica*.

i) *superficie con attrito*

Se sulla superficie è presente l'attrito al nostro sistema (TF.9) si aggiunge la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico su una curva ottenendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau}{ds} + \phi_T(s) = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} + \phi_N(s) = 0 \\ \phi_B(s) = 0 \\ |\phi_T| \leq f_s \sqrt{\phi_N^2 + \phi_B^2} \end{array} \right. \quad (\text{TF.11})$$

Eliminando le reazioni vincolari nell'ultima condizione, tramite le altre, otteniamo una condizione per la tensione:

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| \leq f_s \frac{\tau}{\rho}$$

dove a secondo membro è stato eliminato il modulo essendo presente una quantità non negativa. Tenendo conto che  $\tau > 0$  e che non può essere nulla essendo il filo fortemente teso per ipotesi, possiamo riscrivere:

$$\left| \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{ds} \right| \leq f_s \frac{1}{\rho}$$

Questa condizione comporta che:

$$\int_0^\ell \left| \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{ds} \right| ds \leq \int_0^\ell \frac{f_s}{\rho} ds \quad (\text{TF.12})$$

dove  $\ell$  è la lunghezza del tratto di filo aderente alla superficie.

Infatti se consideriamo una qualunque funzione  $f(x)$ , integrabile su un intervallo  $[a, b]$ , per il teorema della media, esiste un  $c \in [a, b]$  tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Ora se:

$$f(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

essendo  $b - a \geq 0$  si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a) \leq 0$$

Inoltre sappiamo che:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Per cui se vale la (TF.12) a maggior ragione si ha:

$$\left| \int_{\tau_0}^{\tau_\ell} \frac{d\tau}{\tau} \right| \leq \int_0^\ell \frac{f_s}{\rho} ds \quad (\text{TF.13})$$

avendo effettuato il cambiamento di variabili  $s \rightarrow \tau$ , per cui:

$$\int_0^\ell \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{ds} ds = \int_{\tau_0}^{\tau_\ell} \frac{d\tau}{\tau}$$

ed essendo:

$$\tau(0) = \tau_0, \quad \tau(\ell) = \tau_\ell$$

le condizioni al contorno.

Dalla (TF.13) abbiamo infine:

$$\left| \log \left( \frac{\tau_\ell}{\tau_0} \right) \right| \leq \int_0^\ell \frac{f_s}{\rho} ds$$

Posto di considerare come estremo finale del filo ( $s = \ell$ ) quello nel quale la tensione risulta maggiore (in caso contrario si può sempre scambiare la denominazione degli estremi) il logaritmo risulta positivo e si ha la condizione per la tensione agli estremi:

$$\tau_\ell \leq \tau_0 \exp \left( \int_0^\ell \frac{f_s}{\rho} ds \right) \quad (\text{TF.14})$$

Dal momento che l'argomento dell'esponenziale è positivo ne viene di conseguenza che, all'equilibrio, grazie alla presenza dell'attrito,  $\tau_\ell$  è sempre maggiore e può essere anche molto maggiore di  $\tau_0$ . Risulta allora possibile equilibrare, sfruttando la presenza dell'attrito, una forza molto intensa con una notevolmente meno intensa.

Per esempio avvolgendo un filo ben teso attorno ad un cilindro di raggio  $r$  e coefficiente di attrito costante  $f_s$  si ha:

$$\tau_\ell \leq \tau_0 e^{2n\pi f_s}$$

essendo  $n$  il numero delle spire del filo. Quando invece, manca l'attrito, si ha  $f_s = 0$  e quindi l'esponenziale diventa uguale all'unità, e si ha:

$$\tau_\ell = \tau_0$$

Il filo in questo caso può equilibrare solo due forze uguali.

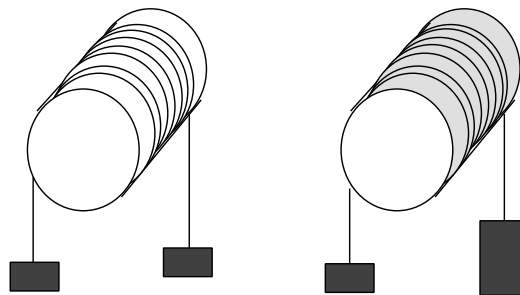


Figura TF. 10: filo avvolto su un cilindro: a) in assenza di attrito; b) in presenza di attrito

### *Equazioni cartesiane dei fili*

Nella seconda categoria di problemi di statica dei fili non è conosciuta alcuna informazione sulla forma nè sulla tensione del filo. In questo caso l'equazione di equilibrio dei fili (TF.7) si proietta sul sistema di assi cartesiani dell'osservatore  $Oxyz$ , ottenendo:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( \tau \frac{dx}{ds} \right) + f_x(s) = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( \tau \frac{dy}{ds} \right) + f_y(s) = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( \tau \frac{dz}{ds} \right) + f_z(s) = 0 \end{cases} \quad (\text{TF.15})$$

Il sistema, così come è scritto, appare indeterminato in quanto contiene quattro funzioni incognite  $x(s), y(s), z(s), \tau(s)$  con sole tre equazioni. In realtà esiste una quarta equazione che è fornita dall'informazione relativa al fatto che:

$$\mathbf{T} \equiv \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$$

è un versore, per cui sussiste il legame:

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \quad (\text{TF.16})$$

e questa completa il sistema rendendolo determinato.

#### *Fili soggetti a forze parallele*

Sono di particolare interesse, per la loro semplicità di soluzione, i problemi in cui i fili sono soggetti a forze distribuite tutte *parallele* tra loro, come accade per esempio per la forza peso. In questo caso il problema diviene un problema piano, in quanto il filo si dispone in un piano.

Per rendersene conto imponiamo nella (TF.7) la condizione:

$$\mathbf{f}(s) = f(s) \mathbf{u}$$

essendo  $\mathbf{u}$  il versore comune delle forze parallele. Dal momento che la funzione di una sola variabile  $f(s)$  si suppone continua e quindi sempre integrabile, possiamo riscrivere la (TF.7) nella forma:

$$\frac{d}{ds} \left\{ \tau \mathbf{T} + \mathbf{u} \int_{s_0}^s f(\hat{s}) d\hat{s} \right\} = 0$$

da cui si ottiene l'equazione in forma integrale:

$$\tau \mathbf{T} + \mathbf{u} \int_{s_0}^s f(\hat{s}) d\hat{s} = \mathbf{R}_0$$

Ponendo  $s = s_0$  la funzione integrale si annulla e si ottiene che il vettore costante  $\mathbf{R}_0$  rappresenta lo sforzo sulla sezione iniziale del filo. Allora si può concludere che, all'equilibrio, il vettore tangente al filo  $\tau \mathbf{T}$ , in una generica sezione, è dato da una combinazione lineare del versore delle forze parallele  $\mathbf{u}$  e del vettore  $\mathbf{R}_0$  che rappresenta lo sforzo al contorno nella sezione iniziale. Dunque la tangente al filo, e quindi il filo, appartiene sempre al piano dei vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{R}_0$ , passante per il punto di applicazione dello sforzo iniziale. Nel caso che i due vettori siano paralleli il filo si dispone lungo una retta ad essi parallela.

Allora conviene scegliere gli assi cartesiani in modo che il piano del filo in equilibrio coincida con il piano cartesiano  $xy$  e l'asse  $y$  abbia direzione parallela alle forze distribuite. In tal caso per i punti del filo risulta  $z \equiv 0$  e il sistema (TF.15) diviene:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( \tau \frac{dx}{ds} \right) = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( \tau \frac{dy}{ds} \right) + f(s) = 0 \end{cases} \quad (\text{TF.17})$$

Dalla prima equazione del sistema si ricava subito l'informazione:



$$\tau \frac{dx}{ds} = C \quad (\text{TF.18})$$

Questa può essere utilizzata introducendo l'equazione incognita per la forma del filo, nella forma cartesiana:

$$y = y(x)$$

che permette di esprimere:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = y' \frac{dx}{ds}$$

denotando con ' la derivata rispetto all'argomento  $x$ . Introducendo questo risultato nella seconda equazione del sistema (TF.17) otteniamo l'equazione differenziale per la forma del filo:

$$C \frac{dy'}{ds} + f(s) = 0$$

Considerando  $y(x(s))$  come funzione composta di  $s$  attraverso  $x$  e sviluppando la derivata si ha:

$$\frac{dy'}{ds} = y'' \frac{dx}{ds} = \frac{C}{\tau} y''$$

Quindi la forma finale dell'equazione per la forma del filo diviene:

$$\boxed{\frac{C^2}{\tau} y'' + f(x, y) = 0} \quad (\text{TF.19})$$

nella quale  $f$  va ora pensata come funzione di  $x$  e  $y$  anzichè di  $s$ .

Integrata la forma del filo si risale alla tensione tramite la (TF.18), tenendo conto che, grazie alla (TF.16) si può ricavare:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (\text{TF.20})$$

Il valore della costante  $C$  si determina tramite le condizioni al contorno.

Vediamo due applicazioni nelle quali le forze parallele sono realizzate dal peso.

### Curva dei ponti sospesi

Il problema della determinazione della forma e della tensione del cavo di sostegno di un ponte sospeso si può risolvere sotto alcune assunzioni, generalmente verificate.

Si suppone che:

— il ponte sia omogeneo e longitudinalmente simmetrico, in maniera che le due funi risultino ugualmente caricate;

— i tiranti siano a distanza piccola l'uno dall'altro rispetto alla lunghezza della campata, in modo da poter considerare la distribuzione delle forze sul filo come una distribuzione continua;

— il peso delle funi di sospensione e quello dei tiranti sia trascurabile rispetto al peso del ponte, condizione questa del tutto ovvia.

Notiamo che i tiranti si comportano come dei fili non soggetti a forze distribuite, e quindi, trasmettono da un capo all'altro la tensione senza modificarla. La loro funzione è quella di trasmettere la forza peso, distribuita sugli elementi del ponte, ai cavi di sospensione.

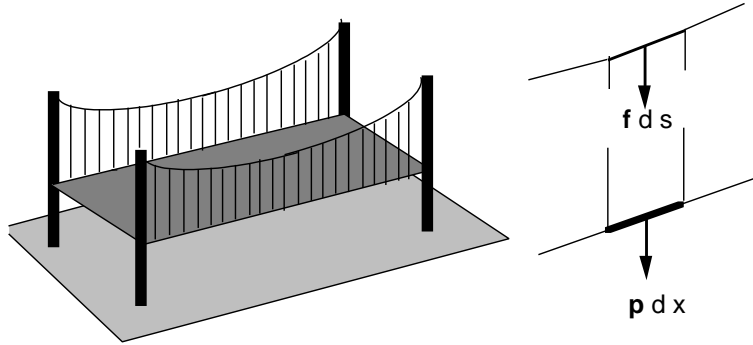


Figura TF. 11: ponte sospeso

Denotando con  $2p$  il peso per unità di lunghezza del ponte, l'elemento di lunghezza  $dx$  è soggetto al peso  $p dx$  che viene a scaricarsi per la metà, data la supposta simmetria longitudinale, sull'elemento  $ds$  di ognuna delle due funi di sostegno. Rimane così determinata la densità lineare di forza agente sull'elemento di fune. Si ha infatti:

$$f ds = p dx$$

Scegliendo l'orientazione dell'asse  $y$  in maniera che risulti:

$$f = f c_2, \quad p = -p c_2$$

si ottiene:

$$f ds = -p dx \quad \Longleftrightarrow \quad f = -p \frac{dx}{ds}$$

e quindi, tenendo conto della (TF.18):

$$f = -C \frac{p}{\tau}$$

Questa informazione inserita nell'equazione per la forma del filo (TF.19) fornisce l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$y'' - \frac{p}{C} = 0$$

Tenendo conto che  $p$  è costante, per l' omogeneità del ponte, l'equazione si integra immediatamente ottenendo l'equazione per la forma del filo:

$$y = \frac{1}{2} \frac{p}{C} x^2 + a x + b$$

Le costanti  $a, b, C$  si ricavano imponendo che la parabola passi per i due punti di sospensione le cui coordinate si suppongono conosciute e assegnando la lunghezza  $\ell$  del filo:

$$\ell = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

essendo  $x_i, x_f$  le ascisse dei punti di sospensione.

### Catenaria

Il secondo problema che esaminiamo, in questa categoria, è quello di un filo sospeso tra due punti, soggetto al proprio peso.

Denotando con:

$$\mathbf{p} = -p \mathbf{c}_2$$

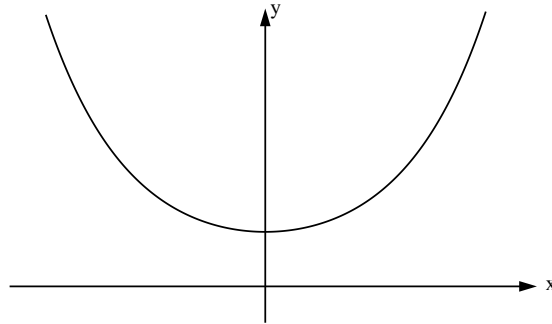


Figura TF. 12: catenaria

il il peso per unità lineare, del filo, otteniamo l'equazione differenziale per la forma del filo:

$$y'' - \frac{p}{C^2} \tau = 0 \quad (\text{TF.21})$$

Ora possiamo esprimere  $\tau$  in termini della funzione incognita  $y$ , facendo uso della (TF.18) e della (TF.20), ottenendo:

$$\tau = C \sqrt{1 + (y')^2} \quad (\text{TF.22})$$

che, sostituita nella (TF.21), porta all'equazione differenziale nella sola funzione incognita  $y$

$$y'' - \frac{p}{C} \sqrt{1 + (y')^2} = 0$$

Si tratta di un'equazione non lineare a variabili separabili. Per integrarla procediamo nel modo seguente:

i) *primo passo.*

Poniamo:

$$u = y'$$

e riscriviamo l'equazione che diviene del primo ordine in  $u$ :

$$u' - \frac{p}{C} \sqrt{1 + u^2} = 0$$

ovvero:

$$\frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{p}{C}$$

E quindi:

$$\int_{u_0}^u \frac{d\hat{u}}{\sqrt{1 + \hat{u}^2}} = \int_0^x \frac{p}{C} d\hat{x}$$

L'integrale a primo membro è noto e vale:

$$\int_{u_0}^u \frac{d\hat{u}}{\sqrt{1 + \hat{u}^2}} = \operatorname{arcsenh} u - \operatorname{arcsenh} u_0$$

(si può ricavare mediante la sostituzione  $u = \operatorname{senh} \xi$ ).

Abbiamo allora, dopo la prima integrazione:

$$\operatorname{arcsenh} u = \frac{p}{C} x + a$$

dove per brevità abbiamo posto:

$$a = \operatorname{arcsenh} u_0$$

Invertendo si ottiene:

$$u = \operatorname{senh} \left( \frac{p}{C} x + a \right)$$

ii) *secondo passo*. Ricordiamo che  $u = y'$  e quindi:

$$y' = \operatorname{senh} \left( \frac{p}{C} x + a \right)$$

Integrando per la seconda volta otteniamo infine l'informazione sulla forma del filo:

$$y = \frac{C}{p} \operatorname{cosh} \left( \frac{p}{C} x + a \right) + b \quad (\text{TF.23})$$

La curva descritta da questa equazione prende il nome di *catenaria omogenea*. Le costanti  $a, b, C$  si ricavano imponendo che il filo passi per i punti di sospensione e abbia una lunghezza assegnata.

#### *Filo fortemente teso*

Mostriamo che quando il filo è molto teso la catenaria si approssima a una parabola.

Esaminiamo il caso in cui i due punti di sospensione siano alla stessa altezza, simmetrici rispetto agli assi cartesiani, avendo coordinate:

$$A_1 \equiv (-x_0, y_0), \quad A_2 \equiv (x_0, y_0), \quad x_0 > 0$$

Allora imponendo che essi appartengano alla catenaria otteniamo le informazioni:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{C}{p} \cosh\left(\frac{p}{C} x_0 + a\right) \\ y_0 = \frac{C}{p} \cosh\left(-\frac{p}{C} x_0 + a\right) \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro e semplificando otteniamo:

$$\cosh\left(\frac{p}{C} x_0 + a\right) = \cosh\left(-\frac{p}{C} x_0 + a\right)$$

L'uguaglianza dei coseni iperbolici si verifica se i due argomenti sono uguali oppure sono opposti. Il caso degli argomenti uguali conduce a  $x_0 = 0$  ed è escluso per ipotesi non essendo di alcun interesse; rimane allora il caso in cui gli argomenti sono opposti che comporta  $a = 0$ . Tenendo conto di questa informazione e imponendo la condizione sulla lunghezza del filo abbiamo:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{p}{C} x\right)} dx = \\ &= \int_{-x_0}^{x_0} \cosh\left(\frac{p}{C} x\right) dx = 2 \frac{C}{p} \operatorname{senh}\left(\frac{p}{C} x_0\right) \end{aligned}$$

Se il filo è molto teso possiamo considerare che la lunghezza del filo sia circa uguale alla lunghezza della campata:

$$\ell \approx 2x_0$$

da cui segue:

$$\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{p}{C} x_0\right)}{\frac{p}{C} x_0} \approx 1$$



Ma questa approssimazione, come è noto, sussiste solamente al limite per  $\frac{p}{C} x_0 \rightarrow 0$ . Si conclude quindi che l'ipotesi che il filo sia molto teso equivale a richiedere che  $\frac{p}{C} x_0$  sia prossimo allo zero. Ora facendo variare  $x$  all'interno della campata del filo si ha che  $|x| \leq x_0$  e quindi anche  $\frac{p}{C} x$  risulta prossimo allo zero. Dunque è legittimo, nello sviluppo in serie del coseno iperbolico intorno allo zero, trascurare i termini di ordine superiore al secondo, ottenendo:

$$\cosh\left(\frac{p}{C} x\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{C^2} x^2$$

Questa informazione inserita nell'equazione della catenaria (TF.23) la approssima alla parabola:

$$y = \frac{1}{2} \frac{p^2}{C^2} x^2 + \frac{C}{p}$$