

ES. Equazioni cardinali della statica

Il principio dei lavori virtuali risulta essere estremamente potente per la ricerca delle configurazioni di equilibrio di un sistema a vincoli lisci perchè non chiama in causa le reazioni vincolari, che sono normalmente incognite del problema. Tuttavia questo suo pregio viene a costituire anche il suo limite: infatti in molti problemi di statica è necessario calcolare anche le reazioni vincolari per conoscere le forze alle quali vengono sottoposte le strutture di sostegno del sistema. E' possibile in questo caso ricorrere al metodo dello svincolamento, ma questo risulta essere piuttosto laborioso e quindi scomodo da utilizzare. Inoltre nei casi in cui i vincoli non sono lisci il principio dei lavori virtuali non è condizione necessaria per l'equilibrio e può quindi non essere soddisfatto.

Per ovviare a questi problemi si sviluppa una seconda metodologia, fondamentale nella statica, che si fonda sulle *equazioni cardinali della statica*, delle quali ci occupiamo in questo capitolo. Le equazioni cardinali della statica chiamano sempre *direttamente* in causa anche le *reazioni vincolari*. E' chiaro che questo può essere uno svantaggio quando il problema non richiede anche la loro determinazione, ma solo la ricerca delle configurazioni di equilibrio; è invece un vantaggio quando il problema richiede la loro determinazione. Inoltre, le equazioni cardinali, a differenza del principio dei lavori virtuali, come vedremo, sono sempre delle *condizioni necessarie* per l'equilibrio di un sistema meccanico. Non sono invece, generalmente sufficienti, ma lo diventano solamente se il sistema è un corpo rigido. Si comprende allora come le due metodologie siano complementari.

Per giungere alle equazioni cardinali della statica si parte dalla definizione di equilibrio per un sistema di punti materiali qualunque: *un sistema è in equilibrio quando ogni suo punto è in equilibrio*. Scriviamo questa condizione senza separare, per ora, le forze in forze attive e reazioni vincolari:

$$\mathbf{f}_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

dove \mathbf{f}_s è la forza complessiva applicata al punto P_s del sistema materiale. Anzichè separare le forze in *attive* e *vincolari* è conveniente, ai fini delle considerazioni che vogliamo sviluppare, considerare la classificazione in *forze esterne* e *forze interne* riscrivendo le condizioni di equilibrio nella forma:

$$\mathbf{f}_s^{(e)} + \mathbf{f}_s^{(i)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{ES.1})$$

Queste condizioni di equilibrio, dal punto di vista algebrico, qualora vengano proiettate su di un sistema di assi cartesiani ortogonali, costituiscono un sistema comprendente nel caso più generale $3n$ equazioni per le $3n$ incognite rappresentate dalle coordinate x_s, y_s, z_s dei punti materiali P_s che costituiscono il sistema meccanico.

- Osserviamo che se *tutte* le forze fossero note, si potrebbe risolvere il sistema e si determinerebbero le configurazioni di equilibrio. Le equazioni cardinali nascono dalla constatazione che, se quanto affermato è vero in teoria, nella pratica *non tutte* le forze agenti sul sistema possono essere conosciute; e, in particolare, in un corpo macroscopico le *forze interne* non sono conosciute, in quanto rappresentano le interazioni mutue fra le particelle del corpo: esse sono impossibili da misurare perchè estremamente deboli e troppo numerose, essendo forze di natura microscopica.

- L'unica informazione universalmente valida in relazione alle forze interne, per qualunque sistema di punti materiali, ci è data dal *terzo principio della dinamica* in base al quale, le forze interne sono riducibili a coppie di braccio nullo, ovvero sono caratterizzate dalle condizioni:

$$\mathbf{R}^{(i)} = 0, \quad \mathbf{M}_\Omega^{(i)} = 0$$

Per chiamare in causa queste informazioni occorre combinare linearmente le condizioni di equilibrio del sistema (ES.1) in modo da far comparire il risultante e il momento risultante delle forze interne in luogo delle singole forze. Possiamo far comparire il risultante sommando membro a membro le

(ES.1) rispetto all'indice s che tabula i punti del sistema. Otteniamo in tal modo:

$$\sum_{s=1}^n \mathbf{f}_s^{(e)} + \sum_{s=1}^n \mathbf{f}_s^{(i)} = 0$$

La prima sommatoria rappresenta il risultante delle forze esterne, mentre la seconda è il risultante delle forze interne, che è nullo per il terzo principio della dinamica. Rimane così:

$$\mathbf{R}^{(e)} = 0 \quad (\text{ES.2})$$

Abbiamo in questo modo ottenuto un'equazione nella quale le forze interne non sono presenti. Rimane ora da utilizzare l'informazione fornita dal terzo principio della dinamica in relazione al momento delle forze interne. Scelto un polo Ω , consideriamo l'espressione:

$$\Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(e)} + \Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(i)} = 0$$

che risulta essere nulla, in conseguenza delle condizioni di equilibrio (ES.1). Sommando sull'indice s otteniamo di conseguenza:

$$\sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(e)} + \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge \mathbf{f}_s^{(i)} = 0$$

La prima sommatoria rappresenta il momento risultante delle forze esterne, mentre la seconda è il momento delle forze interne, che risulta essere nullo per il terzo principio della dinamica. Rimane dunque:

$$\mathbf{M}_{\Omega}^{(e)} = 0 \quad (\text{ES.3})$$

Anche questa equazione non contiene le forze interne. Le equazioni (ES.2) e (ES.3), che sono una conseguenza delle condizioni di equilibrio (ES.1), ma a differenza di queste ultime non contengono le forze interne, prendono il nome di *equazioni cardinali della statica*. A questo punto è conveniente tornare a separare le forze in attive e vincolari e riscrivere le equazioni cardinali nella forma in cui normalmente le utilizzeremo:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{R}^{(e,v)} = 0 \\ \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} + \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,v)} = 0 \end{cases}} \quad (\text{ES.4})$$

- *I vantaggi*. Il primo vantaggio delle equazioni cardinali, rispetto alle condizioni di equilibrio (ES.1) sta nel fatto che in esse sono state eliminate le forze interne. Il secondo vantaggio, rispetto al principio dei lavori virtuali, sta nel fatto che per dedurle non abbiamo fatto ricorso a nessuna ipotesi sulla natura dei vincoli del sistema, per cui le equazioni cardinali della statica risultano valide anche quando i vincoli non sono lisci. Esse sono sempre *condizioni necessarie* per l'equilibrio.

- Lo *svantaggio*, concomitante con il guadagno dell'eliminazione delle forze interne, è conseguenza del fatto che, per eliminare le forze interne abbiamo combinato linearmente le condizioni di equilibrio (ES.1), diminuendo il numero di equazioni linearmente indipendenti. Essendo partiti dal sistema algebrico (ES.1) che, nel caso più generale, è costituito da $3n$ equazioni, otteniamo il sistema delle equazioni cardinali, che nel caso più generale, è formato da sei equazioni. Di conseguenza le equazioni cardinali in genere *non sono sufficienti* per l'equilibrio di un sistema.

Ciò significa che con le equazioni cardinali si può risolvere al massimo un problema a sei incognite. Il tipico sistema che ha un massimo di sei gradi di libertà è il corpo rigido libero. Se il corpo rigido è vincolato diminuisce il numero dei gradi di libertà, ma in compenso nascono delle nuove incognite per la presenza delle reazioni vincolari.

Osserviamo, per inciso, che quando $n = 1$ abbiamo un solo punto e le equazioni cardinali si riducono a sole tre equazioni indipendenti coincidenti con la (ES.1) per un solo punto. Quando $n = 2$ abbiamo un sistema di due punti, ma in questo caso, pur avendo sei coordinate incognite, le equazioni indipendenti sono solo cinque e le equazioni cardinali non sono sufficienti a determinare l'equilibrio. L'esempio di due punti liberi non coincidenti collegati con una molla ideale, mostra come il sistema non è in equilibrio, anche se le equazioni cardinali sono soddisfatte.

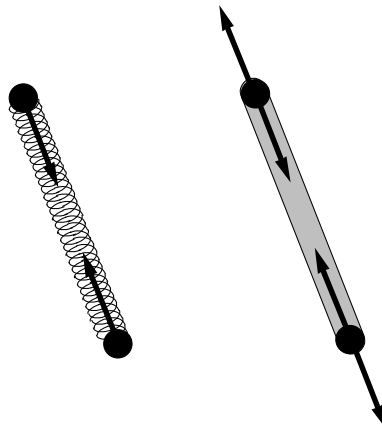


Figura ES. 1: due punti collegati da una molla ideale

Se il sistema materiale poi, ha più di sei gradi di libertà, o comunque più di sei incognite dovute alla presenza di reazioni vincolari, il problema dell'equilibrio risulta staticamente indeterminato.

- Le equazioni cardinali della statica sono condizioni sempre *necessarie* per l'equilibrio di un sistema meccanico, ma generalmente *non sono sufficienti*.

Che siano condizioni necessarie per l'equilibrio è immediato, per come sono state dedotte: infatti, supposto l'equilibrio, espresso dalle (ES.1) esse

risultano verificate di conseguenza, in quanto combinazioni lineari delle (ES.1).

Sufficienza delle equazioni cardinali per i corpi rigidi

Nell'esempio di un sistema di due punti materiali collegati con una molla, sopra riportato, si può osservare che se si impone il vincolo di rigidità fra i due punti, per esempio interponendo fra essi una sbarretta rigida, allora, grazie alla rigidità del sistema, i due punti vengono a trovarsi in equilibrio, in quanto ogni punto si trova sottoposto ad una reazione vincolare, realizzata dalla sbarra rigida, che equilibra la forza elastica ad esso applicata. Non si tratta di una coincidenza, ma di un risultato generale che va sotto il nome di *sufficienza delle equazioni cardinali della statica per l'equilibrio dei corpi rigidi*.

Le equazioni cardinali della statica sono condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo rigido

La via più rapida per la dimostrazione fa ricorso all'ipotesi ausiliaria che i vincoli siano lisci. Questa ipotesi anche se è restrittiva dal punto di vista matematico, non lo è dal punto di vista fisico, in quanto, come abbiamo già visto a proposito del principio dei lavori virtuali, si tratta di un'ipotesi di sicurezza. Se mostriamo che le equazioni cardinali sono sufficienti in condizioni di vincolo liscio, a maggior ragione lo sono in presenza di vincolo non liscio, in quanto dall'esperienza, sappiamo che la presenza dell'attrito favorisce l'equilibrio e, comunque non rimuove le configurazioni che sarebbero di equilibrio quando il vincolo fosse liscio.

DIMOSTRAZIONE

Il teorema da dimostrare è il seguente:

$$\begin{array}{l}
 i) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{R}^{(e,v)} = 0 \\ \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} + \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,v)} = 0 \end{array} \right. \\
 ii) \text{ corpo rigido} \\
 iii) \text{ vincoli lisci}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{equilibrio}$$

Per fare intervenire il principio dei lavori virtuali che ci fornisce una condizione sufficiente per l'equilibrio, ricordiamo anzitutto la relazione che esprime il lavoro di un sistema di forze applicate ai punti di un corpo rigido:

$$\delta L = \mathbf{R} \times \delta \Omega + \mathbf{M}_{\Omega} \times \delta \psi$$

Consideriamo poi i seguenti prodotti scalari che risultano nulli in conseguenza delle equazioni cardinali che si assumono valide per ipotesi:

$$\mathbf{R}^{(e,a)} \times \delta \Omega + \mathbf{R}^{(e,v)} \times \delta \Omega = 0$$

$$\mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \delta \psi + \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,v)} \times \delta \psi = 0$$

Sommando membro a membro queste equazioni scalari e ordinando ricaviamo:

$$\mathbf{R}^{(e,a)} \times \delta \Omega + \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \delta \psi + \mathbf{R}^{(e,v)} \times \delta \Omega + \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,v)} \times \delta \psi = 0$$

Riconosciamo nei primi due addendi il lavoro delle forze esterne attive e negli ultimi due il lavoro delle forze esterne vincolari. Possiamo dunque concludere che:

$$\delta L^{(e,a)} + \delta L^{(e,v)} = 0, \quad \forall \delta \Omega, \delta \psi \quad (\text{ES.5})$$

risultato valido per qualunque spostamento virtuale, dal momento che non abbiamo fatto alcuna ipotesi sugli spostamenti.

Ora dobbiamo tenere conto del fatto che *il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è nullo*, come è stato mostrato nel capitolo (LV). Di conseguenza, possiamo scrivere:

$$\delta L^{(i)} = \delta L^{(i,a)} + \delta L^{(i,v)} = 0, \quad \forall \delta \Omega, \delta \psi \quad (\text{ES.6})$$

Sommando membro a membro la (ES.5) e la (ES.6) otteniamo:

$$\delta L^{(e,a)} + \delta L^{(e,v)} + \delta L^{(i,a)} + \delta L^{(i,v)} = 0, \quad \forall \delta \Omega, \delta \psi$$

Ovvero:

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} = 0, \quad \forall \delta \Omega, \delta \psi \quad (\text{ES.7})$$

Ora tenendo conto dell'ipotesi ausiliaria per cui i vincoli sono lisci, che grazie al principio delle reazioni vincolari equivale a dire:

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad \forall \delta \Omega, \delta \psi$$

segue subito nella (ES.7):

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall \delta \Omega, \delta \psi$$

Ma questa è la condizione del principio dei lavori virtuali ed è *sufficiente* per l'equilibrio del sistema. Resta così provata anche la sufficienza delle equazioni cardinali della statica per l'equilibrio del corpo rigido.

Osservazioni

- Il teorema che abbiamo appena provato afferma che le equazioni cardinali della statica sono condizioni sufficienti per determinare le *configurazioni di equilibrio* di un sistema rigido. Esse tuttavia, possono non essere sufficienti a determinare anche le reazioni vincolari. Questo non meraviglia se teniamo conto che la prova della sufficienza è stata condotta mediante il principio dei lavori virtuali che è condizione necessaria e sufficiente per determinare le configurazioni di equilibrio, ma non si preoccupa delle reazioni vincolari. Può dunque accadere, che alcuni problemi di statica rigida si presentino indeterminati per quanto riguarda le reazioni vincolari. Questo non inficia la sufficienza delle equazioni cardinali ai fini della determinazione delle configurazioni di equilibrio.

- Dal momento che nelle equazioni cardinali compaiono solo il risultante e il momento risultante delle forze esterne, e poichè le *operazioni elementari* non alterano il risultante e il momento risultante di un sistema di vettori applicati, ne consegue, grazie alla sufficienza delle equazioni cardinali provata per i corpi rigidi, che se si effettuano delle operazioni elementari su un sistema di forze che mantiene in equilibrio un corpo rigido, l'equilibrio non ne viene alterato, perchè le equazioni cardinali continuano ad essere soddisfatte. Se ne trae la conseguenza che quando il corpo è rigido si possono applicare i teoremi di riducibilità ai sistemi di forze agenti su di esso senza modificarne l'equilibrio.

- Nella nostra indagine sull'equilibrio dei sistemi vincolati assumeremo, come si fa usualmente, che quando un vincolo non è impossibilitato ad esplicitare le reazioni vincolari che mantengono in equilibrio un corpo, esse vengano effettivamente esplicitate, in risposta alle sollecitazioni attive che intervengono sul vincolo. In altri termini consideriamo il vincolo in termini *teorici* senza tener conto del fatto che la sua struttura possa cedere se sottoposta ad una sollecitazione eccessiva. Per cui vengono considerate usualmente necessarie e sufficienti per l'equilibrio quelle condizioni che dimostrano che il vincolo non è impossibilitato ad esplicitare le reazioni vincolari richieste per l'equilibrio. Un esempio di questo è dato dal corpo rigido appoggiato a un piano orizzontale privo di attrito che esamineremo in

seguito.

Applichiamo adesso le equazioni cardinali della statica al corpo rigido, per determinare le condizioni di equilibrio e le reazioni vincolari. Esaminiamo il caso del corpo rigido con un punto fisso, con un asse fisso e scorrevole su una semiretta. Ritroveremo, per quanto riguarda le condizioni di equilibrio, gli stessi risultati che abbiamo dedotto con il principio dei lavori virtuali; in più avremo anche le informazioni relative alle reazioni vincolari.

Corpo rigido con un punto fisso

Nel caso del corpo rigido con un punto fisso il vincolo è costituito dal punto fisso Ω , per cui la reazione vincolare è unica ed è applicata nel punto fisso.

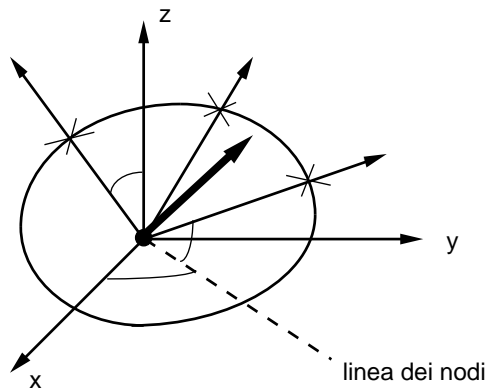


Figura ES. 2: equilibrio di un corpo rigido con un punto fisso e reazione vincolare

Per scrivere le equazioni cardinali conviene scegliere il punto fisso Ω come polo di riduzione dei momenti: in tal modo la reazione vincolare Φ

che è applicata in Ω viene ad avere momento nullo e le equazioni cardinali della statica, vengono specializzate per l'equilibrio del corpo rigido con un punto fisso, nel modo seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{\Phi} = 0 \\ \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.8})$$

L'equazione dei momenti non contiene la reazione vincolare e perciò fornisce le *equazioni pure dell'equilibrio*, mentre l'equazione del risultante permette di ricavare la reazione vincolare, dopo aver risolto il problema dell'equilibrio.

Notiamo come la condizione pura per l'equilibrio è la stessa che era stata trovata anche con il principio dei lavori virtuali. Abbiamo in questo caso, in più ottenuto le equazioni che ci permettono di calcolare anche la reazione vincolare.

Proiettando il sistema (ES.8) su una terna cartesiana ortogonale otteniamo sei equazioni per le sei incognite costituite dai tre gradi di libertà del corpo rigido con un punto fisso, che generalmente sono identificati dagli angoli di Eulero, e per le tre componenti della reazione vincolare:

$$\begin{cases} R_x^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) + \Phi_x = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) + \Phi_y = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) + \Phi_z = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.9})$$

Il sistema è staticamente determinato. Risolto il problema dell'equilibrio, mediante le equazioni dei momenti, si ottengono le configurazioni di equilibrio espresse da delle terne ordinate del tipo:

$$C^* \equiv (\vartheta^*, \varphi^*, \psi^*)$$

Sostituendo i valori trovati per gli angoli di Eulero nell'equazione del risultante si determina la corrispondente reazione vincolare.

Corpo rigido con un asse fisso

L'analisi dell'equilibrio del corpo rigido con un asse fisso con il metodo delle equazioni cardinali della statica richiede una maggiore attenzione, in quanto il problema risulta in genere staticamente indeterminato, a meno di non fare qualche ipotesi che dia ulteriori informazioni sulla struttura dei vincoli. Questa indeterminazione è dovuta al fatto che un'asse si può fissare vincolandolo in molti modi differenti.

Per fissare una retta possiamo, per esempio, pensare di fissare due punti del corpo rigido: rimane così bloccata la loro retta congiungente. A questo scopo occorrono due reazioni vincolari, applicate nei due punti fissati Ω_1, Ω_2 .

Le equazioni cardinali della statica, adottando questo schema per i vincoli, si specializzano nel modo seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(e,a)} + \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 = 0 \\ \mathbf{M}_{\Omega_1}^{(e,a)} + \Omega_1 \Omega_2 \wedge \boldsymbol{\Phi}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.10})$$

avendo scelto, per comodità il polo di riduzione dei momenti coincidente con il punto di applicazione Ω_1 di una delle due reazioni vincolari, in modo

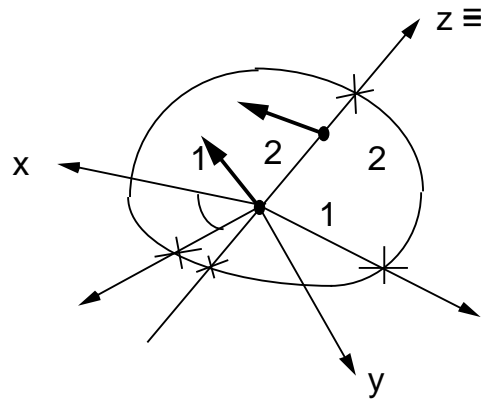


Figura ES. 3: equilibrio di un corpo rigido con un asse fisso e reazioni vincolari

che il suo momento si annulli. Rimane, però in questo caso il momento dell'altra reazione vincolare. Il problema ha un solo grado di libertà ϑ per cui occorre una sola equazione pura per l'equilibrio, la quale si ottiene proiettando l'equazione dei momenti sull'asse fisso, come è immediato verificare considerandone il prodotto scalare per \mathbf{c}_3 :

$$\mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \mathbf{c}_3 + \Omega_1 \Omega_2 \wedge \Phi_2 \times \mathbf{c}_3 = 0$$

Il prodotto misto:

$$\Omega_1 \Omega_2 \wedge \Phi_2 \times \mathbf{c}_3 = 0$$

si annulla in quanto contiene i due vettori tra loro paralleli $\Omega_1 \Omega_2$, diretto come l'asse fisso e \mathbf{c}_3 che è il versore dello stesso asse; quindi i tre vettori del prodotto misto sono complanari e il prodotto si annulla. Rimane allora:

$$M_z^{(e,a)} = 0$$

che è la stessa condizione di equilibrio che avevamo ottenuto facendo uso del principio dei lavori virtuali. L'equilibrio resta dunque determinato, come deve essere, in forza della sufficienza delle equazioni cardinali della statica per i corpi rigidi.

Per calcolare le reazioni vincolari ci servono adesso le proiezioni di tutte le equazioni su una terna cartesiana, scelta come in figura, in modo che l'asse fisso coincida con l'asse z . Abbiamo il sistema completo di sei equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x^{(e,a)}(\vartheta, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\vartheta, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\vartheta, t) + \Phi_{1z} + \Phi_{2z} = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\vartheta, t) - \ell \Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\vartheta, t) + \ell \Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\vartheta, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{ES.11})$$

dove abbiamo denotato:

$$\Omega_1 \Omega_2 = \ell \mathbf{c}_3, \quad \ell = \Omega_1 \Omega_2 \times \mathbf{c}_3$$

Oltre all'equazione pura dell'equilibrio che abbiamo già esaminato, il sistema contiene altre cinque equazioni che coinvolgono le reazioni vincolari, ma le componenti incognite delle reazioni sono sei. Il sistema rimane staticamente indeterminato rispetto alle reazioni vincolari. Notiamo che se avessimo vincolato più di due punti dell'asse avremmo avuto ancora più incognite.

- Osserviamo che le componenti x e y delle reazioni vincolari sono determinate in quanto disponiamo di quattro equazioni che contengono queste

incognite senza contenere le componenti z e sono le proiezioni sugli assi x, y delle nostre equazioni. Le componenti z delle reazioni vincolari risultano invece indeterminate, perchè rimane solo un'equazione disponibile per esse, data dalla proiezione sull'asse z dell'equazione del risultante.

Questa indeterminazione, in effetti, è comprensibile perchè l'aver fissato due punti per bloccare una retta di un corpo rigido, è un vincolo *sovrabbondante* in quanto lo scorrimento della retta è già bloccato dall'aver fissato un punto di essa, ad esempio Ω_1 ; per cui in Ω_2 basta bloccare la direzione della retta, ad esempio mediante un cursore cilindrico privo di attrito (cerniera cilindrica).

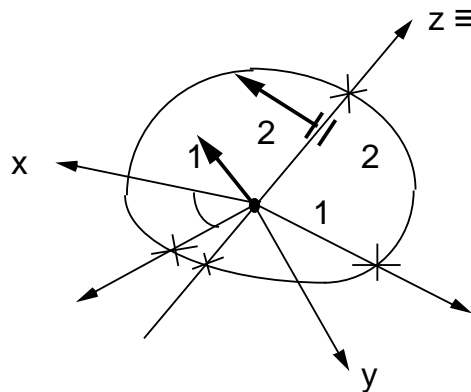


Figura ES. 4: asse fisso realizzato mediante un punto fisso e una cerniera cilindrica

Poichè il cursore è supposto privo di attrito, la reazione vincolare risulta ortogonale alla superficie del cursore, cioè ortogonale all'asse fisso, ovvero si ha:

$$\Phi_{2z} = 0$$

Viene così ad essere eliminata un'incognita e il problema risulta completamente determinato. Il sistema completo delle equazioni cardinali contiene ora sei equazioni per sei incognite:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x^{(e,a)}(\vartheta, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\vartheta, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\vartheta, t) + \Phi_{1z} = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\vartheta, t) - \ell \Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\vartheta, t) + \ell \Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\vartheta, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{ES.12})$$

Corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa

Nel caso dell'equilibrio di un corpo rigido scorrevole su di una semiretta bisogna scrivere le equazioni cardinali separatamente per le configurazioni ordinarie e per le configurazioni di confine.

configurazioni ordinarie

Per le configurazioni ordinarie, supposti privi di attrito i due cursori mediante i quali il corpo scorre lungo l'asse, le uniche reazioni vincolari sono esplicitate dai cursori e risultano normali all'asse z .

Perciò il sistema delle equazioni cardinali si scrive:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^{(e,a)} + \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \\ \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} + \Omega_1 \Omega_2 \wedge \Phi_2 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{ES.13})$$

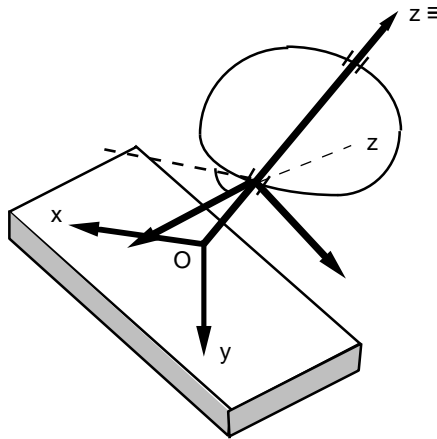


Figura ES. 5: corpo rigido scorrevole in configurazione ordinaria

come nel caso del corpo rigido con un asse fisso, con la differenza che ora i punti Ω_1 (che è stato ancora scelto come polo di riduzione) e Ω_2 sono mobili rispetto all'osservatore. Proiettando il sistema sugli assi cartesiani otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x^{(e,a)}(\vartheta, z, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\vartheta, z, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\vartheta, z, t) = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\vartheta, z, t) - \ell \Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\vartheta, z, t) + \ell \Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\vartheta, z, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{ES.14})$$

Grazie al fatto che le reazioni vincolari sono normali all'asse z , per cui le loro componenti lungo quest'asse risultano nulle, abbiamo due equazioni

pure per l'equilibrio:

$$R_z^{(e,a)}(\vartheta, z, t) = 0, \quad M_z^{(e,a)}(\vartheta, z, t) = 0$$

che coincidono con quelle che avevamo ottenuto con il principio dei lavori virtuali. Le rimanenti quattro equazioni determinano le quattro componenti incognite delle due reazioni vincolari. Il problema è allora staticamente determinato.

configurazioni di confine

Per le configurazioni di confine, il problema risulta staticamente determinato a condizione che si supponga che l'appoggio in corrispondenza del vincolo unilaterale, privo di attrito, avvenga in un solo punto di contatto $\Omega_3 \equiv O$: in tal modo la reazione vincolare corrispondente Φ_3 risulta parallela all'asse z :

$$\Phi_3 = \Phi_3 \mathbf{c}_3, \quad \Phi_3 = \Phi_3 \times \mathbf{c}_3$$

Il sistema delle equazioni cardinali si scrive in questo caso:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(e,a)} + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ M_{\Omega}^{(e,a)} + \Omega_1 \Omega_2 \wedge \Phi_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.15})$$

Notiamo che anche il momento della terza reazione vincolare risulta nullo, in quanto:

$$\Omega_1 \Omega_3 \wedge \Phi_3 = 0$$

essendo i due vettori paralleli tra loro, grazie al fatto che l'appoggio è privo di attrito.

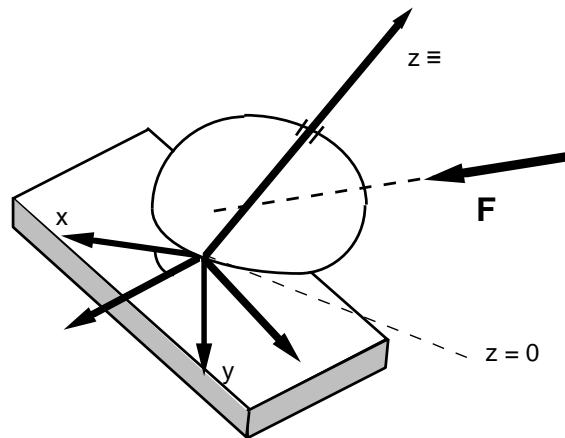


Figura ES. 6: corpo rigido scorrevole in configurazione di confine

In questo caso il sistema precedente, proiettato sugli assi fornisce:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x^{(e,a)}(\vartheta, 0, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\vartheta, 0, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\vartheta, 0, t) + \Phi_3 = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\vartheta, 0, t) - \ell \Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\vartheta, 0, t) + \ell \Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\vartheta, 0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{ES.16})$$

La condizione pura dell'equilibrio è data da:

$$M_z^{(e,a)}(\vartheta, 0, t) = 0$$

per l'unico parametro incognito ϑ , in quanto il valore di z al confine è fissato a 0. Le rimanenti cinque equazioni determinano le cinque componenti incognite delle reazioni vincolari.

Ma, mediante il principio dei lavori virtuali, avevamo ottenuto in più la disuguaglianza:

$$R_z^{(e,a)} \leq 0$$

Ora il vincolo unilaterale può realizzare solamente reazioni vincolari di pressione e non di trazione, in quanto il corpo è libero di distaccarsi dall'appoggio; di conseguenza:

$$\Phi_3 \geq 0$$

e quindi risulta:

$$R_z^{(e,a)} = -\Phi_3 \leq 0$$

Equilibrio di sistemi costituiti da più corpi rigidi

Non ostante che le equazioni cardinali della statica siano condizioni sufficienti, per l'equilibrio, solo per un sistema rigido, esse si possono applicare, in modo opportuno, anche a sistemi che, pur non essendo rigidi nel loro complesso, sono costituiti di corpi rigidi. Molti sistemi olonomi, pur non essendo rigidi sono scomponibili in sottosistemi rigidi.

In questo caso si può affermare, in conseguenza della definizione di equilibrio data per un sistema di punti materiali, che *l'intero sistema è in equilibrio quando ogni sua parte rigida è in equilibrio*.

Poichè le equazioni cardinali sono condizioni sufficienti per l'equilibrio di un corpo rigido, si può imporre l'equilibrio dell'intero sistema scrivendo le equazioni cardinali per ogni sua parte rigida. Si ottiene in tal modo un sistema di condizioni di equilibrio per l'intero sistema meccanico costituito dalle equazioni cardinali relative ad ogni parte rigida.

- Vale la pena fare un'osservazione che può risultare non poco utile dal punto di vista operativo. Molti sistemi meccanici sono costituiti da parti rigide e inoltre sono soggetti a vincoli lisci. Per questi sistemi possiamo fare uso sia delle equazioni cardinali, nel modo ora specificato, sia del principio dei lavori virtuali; entrambe le metodologie fornendo in questi casi delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio. In genere risulta più semplice utilizzare il principio dei lavori virtuali per la determinazione delle configurazioni di equilibrio del sistema. Successivamente, qualora siano richieste anche le reazioni vincolari, conviene fare ricorso alle equazioni cardinali scrivendo solo quelle equazioni che sono necessarie per la determinazione delle reazioni, e tralasciando le equazioni pure per l'equilibrio, che è già stato determinato con il principio dei lavori virtuali. Questo metodo risulta particolarmente rapido quando, ai fini del calcolo delle reazioni vincolari vengono chiamate in causa solo le equazioni del risultante e non sono necessarie le equazioni del momento risultante.

Corpo rigido appoggiato a un piano orizzontale liscio

Esaminiamo ora il problema dell'equilibrio di un corpo rigido soggetto alla forza peso (ed eventualmente ad ulteriori forze di carico, cioè forze parallele e concordi con il peso), appoggiato a un piano orizzontale privo di attrito.

Preliminarmente, anzitutto, analizziamo i sistemi delle forze in gioco:

— le forze attive costituiscono un sistema di vettori applicati paralleli e concordi (forza peso ed eventuali forze di carico) e come tali sono riducibili al solo vettore risultante delle forze attive, che indichiamo con \mathbf{P} applicato

al centro C delle forze attive, che, nel caso sia presente la sola forza peso, coincide con il baricentro del corpo.

— Le reazioni vincolari, essendo il vincolo liscio e unilaterale, costituiscono un sistema di vettori paralleli e concordi, riducibili al solo vettore risultante delle reazioni vincolari che indichiamo con V , applicato nel centro delle reazioni vincolari C_v .

Notiamo che abbiamo applicato i teoremi di riducibilità e che questi, come è stato già osservato, non modificano l'equilibrio essendo il corpo rigido.

Si definisce poi *centro di pressione* la proiezione C^* del centro delle forze attive, sul piano di appoggio.

Insieme discreto di punti di appoggio

Esaminiamo, per primo, il caso in cui l'insieme dei punti in cui il corpo si trova a contatto con il piano (punti di appoggio) costituisca un insieme *discreto* costituito da n punti:

$$\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

ai quali sono applicate le reazioni vincolari:

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$$

Per trattare il problema introduciamo la definizione di *poligono di appoggio*.

Si definisce *poligono di appoggio* un poligono che ha le seguenti tre proprietà:

- i) i vertici del poligono sono tutti dei punti di appoggio;

ii) i punti di appoggio che non sono vertici si trovano non esternamente al poligono di appoggio;

iii) il poligono è convesso.

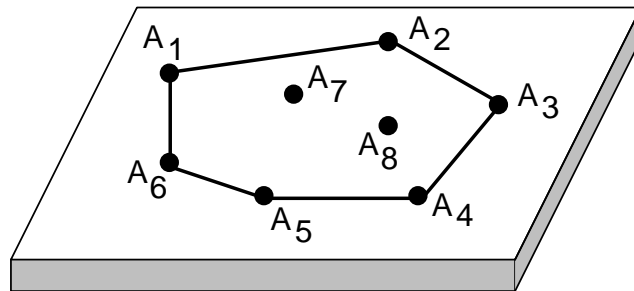


Figura ES. 7: poligono di appoggio

Introdotta il poligono di appoggio si dimostra il seguente enunciato:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido pesante appoggiato a un piano orizzontale, privo di attrito, sia in equilibrio è che il centro di pressione cada non esternamente al poligono di appoggio

DIMOSTRAZIONE

Abbiamo già esaminato i sistemi delle forze attive e delle reazioni vincolari, e abbiamo visto che ciascuno dei sistemi risulta riducibile a un solo vettore applicato nel rispettivo centro delle forze parallele.

Inoltre le reazioni vincolari costituiscono un sistema di vettori *paralleli e concordi*, i cui punti di applicazione sono non esterni ad una curva convessa

(che nel nostro caso è il poligono di appoggio).

Ma conosciamo una proprietà del centro dei vettori paralleli secondo cui: *se i punti di applicazione di un sistema di vettori paralleli e concordi appartengono ad un piano e sono racchiudibili mediante una curva convessa, allora il centro cade non esternamente alla curva.*

Ne consegue che, nel problema che stiamo esaminando, il centro delle reazioni vincolari cade non esternamente al poligono di appoggio. Ora la condizione necessaria e sufficiente affinché il corpo sia in equilibrio è fornita dalle equazioni cardinali della statica che nel nostro caso si scrivono:

$$\begin{cases} \mathbf{P} + \mathbf{V} = 0 \\ \Omega C \wedge \mathbf{P} + \Omega C_v \wedge \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.17})$$

Ma questo equivale a richiedere che i vettori applicati (C, \mathbf{P}) , (C_v, \mathbf{V}) , ai quali sono stati ridotti i sistemi delle forze, formino una coppia di braccio nullo. Ma affinché i vettori formino una coppia di braccio nullo devono avere in comune la retta d'azione e cioè C e C_v devono trovarsi sulla stessa verticale, ovvero C_v deve coincidere con la proiezione di C sul piano di appoggio, ovvero il centro di pressione C^* deve coincidere con il centro delle reazioni vincolari C_v .

Ora abbiamo visto che il centro delle reazioni vincolari non può cadere esternamente al poligono di appoggio: dunque affinché ci sia l'equilibrio il centro di pressione deve cadere non esternamente al poligono di appoggio. In questo caso e solo in questo caso il vincolo non è impossibilitato ad esplicitare le reazioni vincolari che realizzano l'equilibrio. Si assume allora che il vincolo sia capace di esplicitare la reazione vincolare richiesta reagendo alla sollecitazione della forza attiva (vincolo teorico).

Calcolo delle reazioni vincolari

Per procedere al calcolo delle reazioni vincolari scriviamo le equazioni

cardinali per il nostro problema, assumendo che il corpo si trovi in equilibrio sul piano:

$$\mathbf{P} + \sum_{s=1}^n \Phi_s = 0$$

$$\Omega C^* \wedge \mathbf{P} + \sum_{s=1}^n \Omega A_s \wedge \Phi_s = 0$$

Proiettiamo le equazioni cardinali sugli assi di un riferimento cartesiano ortogonale la cui origine coincide con il polo di riduzione Ω , gli assi x, y appartengono al piano di appoggio e l'asse z , che risulta verticale, sia orientato verso l'alto, cioè in verso discorde con il vettore della forza peso \mathbf{P} e quindi concorde con le reazioni vincolari.

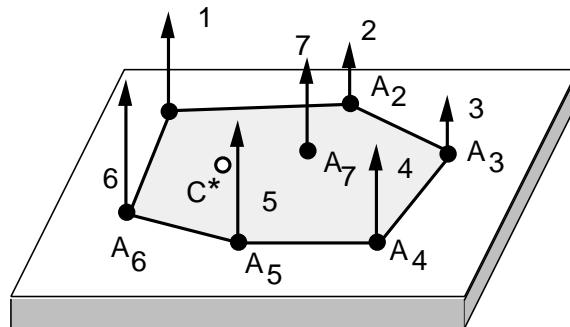


Figura ES. 8: reazioni vincolari agli appoggi

Rispetto al sistema così definito i vettori che ci interessano per il calcolo si rappresentano come:

$$OA_s \equiv (x_s, y_s, 0), \quad OC^* \equiv (x^*, y^*, 0), \quad \Phi_s \equiv (0, 0, \Phi_s), \quad \mathbf{P} \equiv (0, 0, -P)$$

Proiettando si hanno in tutto tre equazioni, una per il risultante, che ha componente non nulla solo lungo l'asse z e due per il momento che, essendo normale ai vettori paralleli, ha componenti non nulle solo nel piano xy :

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n \Phi_s - P = 0 \\ \sum_{s=1}^n y_s \Phi_s - y^* P = 0 \\ \sum_{s=1}^n x_s \Phi_s - x^* P = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.18})$$

Abbiamo un sistema di tre equazioni nelle n incognite Φ_s . Il sistema risulta indeterminato quando $n > 3$, cioè nei casi di maggiore utilità pratica. Esaminiamo, anzitutto, i casi in cui il problema risulta determinato.

caso $n = 1$

Se si ha un solo appoggio, l'unica reazione vincolare all'equilibrio è applicata nel centro di pressione, per cui le tre equazioni cardinali si scrivono:

$$\begin{cases} \Phi - P = 0 \\ y^*(\Phi - P) = 0 \\ x^*(\Phi - P) = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.19})$$

La sola equazione linearmente indipendente esprime la condizione di equilibrio del punto di appoggio.

caso $n = 2$

Le equazioni cardinali si scrivono:

$$\begin{cases} \Phi_1 + \Phi_2 - P = 0 \\ y_1\Phi_1 + y_2\Phi_2 - y^*P = 0 \\ x_1\Phi_1 + x_2\Phi_2 - x^*P = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.20})$$

In questo caso una delle tre equazioni, all'equilibrio, risulta linearmente dipendente dalle altre due, in quanto il centro di pressione deve trovarsi non esternamente al poligono di appoggio, che si riduce al segmento congiungente i due punti di appoggio. Allora A_1, A_2, C^* appartengono ad una stessa retta, cioè le loro coordinate soddisfano ad un'equazione lineare del tipo:

$$y = m x + q$$

Per cui possiamo riscrivere la seconda equazione come:

$$m(x_1\Phi_1 + x_2\Phi_2 - x^*P) + q(\Phi_1 + \Phi_2 - P) = 0$$

che è una combinazione lineare delle altre due. Le reazioni vincolari sono date dalla risoluzione del sistema delle due equazioni indipendenti:

$$\Phi_1 = \frac{x^* - x_2}{x_1 - x_2} P, \quad \Phi_2 = -\frac{x^* - x_1}{x_1 - x_2} P$$

Evidentemente i due casi esaminati non sono di interesse pratico data l'instabilità dell'equilibrio di un corpo su uno o due appoggi.

caso $n = 3$

Il caso di un corpo con tre appoggi conduce al sistema delle equazioni cardinali seguente:

$$\begin{cases} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = P \\ x_1\Phi_1 + x_2\Phi_2 + x_3\Phi_3 = x^*P \\ y_1\Phi_1 + y_2\Phi_2 + y_3\Phi_3 = y^*P \end{cases} \quad (\text{ES.21})$$

Questo rappresenta un sistema lineare non omogeneo, supposto $P \neq 0$, di tre equazioni nelle tre incognite Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Il determinante dei coefficienti è dato da:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 2S$$

dove si è indicata con S l'area del triangolo di vertici A_1, A_2, A_3 .

Notiamo che se $\Delta = 0$ i tre punti di appoggio risultano allineati, in quanto le loro coordinate risultano linearmente dipendenti e quindi i punti appartengono ad una stessa retta. In questo caso affinché ci sia equilibrio, il centro di pressione che deve trovarsi non esterno al poligono di appoggio, che è un segmento, risulta anch'esso allineato con i punti di appoggio. Il problema risulta staticamente indeterminato in quanto le tre equazioni sono linearmente dipendenti. Se invece $\Delta \neq 0$ il sistema di Cramer ammette una soluzione unica. Indicando i determinanti delle incognite con:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^* & x_2 & x_3 \\ y^* & y_2 & y_3 \end{vmatrix} P, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x^* & x_3 \\ y_1 & y^* & y_3 \end{vmatrix} P, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x^* \\ y_1 & y_2 & y^* \end{vmatrix} P$$

risulta:

$$\Delta_1 = 2S_1 P, \quad \Delta_2 = 2S_2 P, \quad \Delta_3 = 2S_3 P$$

dove S_1, S_2, S_3 sono le aree dei triangoli di cui un vertice è il centro di pressione e gli altri due vertici sono i punti di applicazione delle reazioni vincolari con esclusione di quella che si sta calcolando. Si ottiene allora:

$$\Phi_1 = \frac{S_1}{S} P, \quad \Phi_2 = \frac{S_2}{S} P, \quad \Phi_3 = \frac{S_3}{S} P$$

Si vede allora che la reazione vincolare ha intensità tanto minore quanto più il suo punto di applicazione è lontano dal centro di pressione. Inoltre se il centro di pressione coincide con il baricentro geometrico del triangolo, per cui le tre aree S_1, S_2, S_3 sono uguali, le tre reazioni vincolari risultano uguali e il carico è quindi distribuito uniformemente sui tre appoggi.

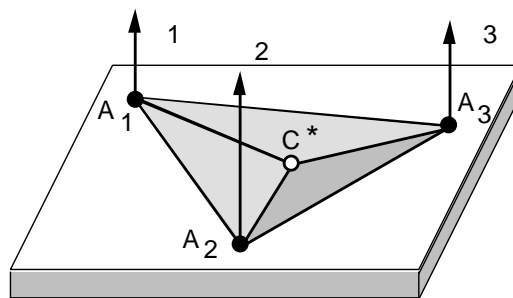


Figura ES. 9: triangolo di appoggio

caso $n > 3$

Il caso con più di tre appoggi, che è quello più interessante dal punto di vista pratico, risulta staticamente indeterminato. Ciò significa che per risolverlo non bastano le sole equazioni cardinali della statica, ma occorre qualche ulteriore informazione sulla natura dei vincoli, che dobbiamo trarre

da considerazioni fisiche sul problema. In altri termini lo schema corpo rigido-appoggio rigido non è sufficiente a descrivere il fenomeno. Procediamo alle seguenti considerazioni che ci conducono a delle ipotesi aggiuntive, in vista della risoluzione del problema.

L'esperienza mostra, infatti, che il suolo, quando è sottoposto al carico di un corpo, tende ad abbassarsi cedendo per realizzare l'equilibrio. Sembra ragionevole, perciò fare l'ipotesi di una cedevolezza lineare del terreno in funzione dell'entità della reazione vincolare che in un dato punto di appoggio deve essere esplicitata. In prima approssimazione il suolo può essere supposto elastico e l'elasticità del suolo rappresentata come una funzione lineare, in accordo con la legge di Hooke. Ne consegue la:

- *prima ipotesi*: si può scrivere il legame tra la generica reazione vincolare e l'abbassamento del punto di applicazione:

$$\Phi_s = -k^2 z_s \quad (\text{ES.22})$$

essendo k^2 la costante elastica del terreno che viene supposta uguale su tutta la superficie del poligono di appoggio e z_s la quota del punto di appoggio A_s dopo l'abbassamento del suolo.

L'abbassamento del suolo può considerarsi piccolo rispetto a tutte le altre lunghezze che entrano in gioco nel problema, per cui è accettabile assumere che:

- *seconda ipotesi*: dopo il cedimento il poligono di appoggio si trova ancora ad appartenere ad un piano, in quanto l'appoggio avviene sugli stessi punti del corpo, che essendo rigido, stanno ancora su un piano.

Sotto queste ipotesi ulteriori il problema della determinazione delle reazioni vincolari viene ricondotto a quello della determinazione dell'equazione del piano di appoggio dopo il cedimento.

L'equazione di tale piano è un'equazione lineare che, per comodità, scriviamo nella forma esplicita rispetto a z :

$$z = a x + b y + c \quad (\text{ES.23})$$

Tenendo conto della seconda ipotesi, dopo l'abbassamento del suolo, tutti i punti di appoggio devono appartenere al piano, e quindi le loro coordinate devono soddisfare l'equazione (ES.23):

$$z_s = a x_s + b y_s + c$$

Di conseguenza, grazie alla prima ipotesi, le reazioni vincolari risultano legate ai coefficienti che caratterizzano il piano e alle coordinate dei punti sul piano di appoggio:

$$\Phi_s = -k^2(a x_s + b y_s + c) \quad (\text{ES.24})$$

Il problema è stato così ricondotto alle tre incognite a, b, c e quindi le tre equazioni cardinali sono sufficienti a determinarlo. Sostituendo le (ES.24) nel sistema (ES.18) otteniamo il sistema risolutivo che scriviamo:

$$\begin{cases} k^2 n x_G a + k^2 n y_G b + k^2 n c + P = 0 \\ k^2 C' a + k^2 A b + k^2 n y_G c + y^* P = 0 \\ k^2 B a + k^2 C' b + k^2 n x_G c + x^* P = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.25})$$

dove sono state introdotte le seguenti notazioni di comodo:

$$x_G = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n x_s, \quad y_G = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n y_s$$

$$A = \sum_{s=1}^n y_s^2, \quad B = \sum_{s=1}^n x_s^2, \quad C' = \sum_{s=1}^n x_s y_s$$

Notiamo che, anche se il problema che stiamo trattando non ha a che fare con i baricentri e con i momenti d'inerzia, tuttavia da un punto di vista puramente formale, le quantità x_G, y_G hanno le stesse espressioni che avrebbero le coordinate del baricentro di n masse unitarie calcolate nei punti di appoggio; e le quantità A, B, C' uguagliano i momenti d'inerzia relativi agli assi x e y e il momento di deviazione della stessa distribuzione di masse fittizie. Questa osservazione ci permette una notevole semplificazione del sistema (ES.25) qualora scegliamo l'origine del sistema di assi cartesiani nel baricentro delle masse fittizie, ottenendo in tal modo:

$$x_G = 0, \quad y_G = 0$$

e la direzione degli assi x, y in modo che risultino assi principali d'inerzia, ottenendo così:

$$C' = 0$$

Con questa scelta del sistema di assi le equazioni del sistema risolutivo (ES.25) si riducono alle seguenti:

$$\begin{cases} k^2 n c + P = 0 \\ k^2 A b + y^* P = 0 \\ k^2 B a + x^* P = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.26})$$

Risolvendo otteniamo le tre incognite:

$$a = -\frac{x^* P}{k^2 B}, \quad b = -\frac{y^* P}{k^2 A}, \quad c = -\frac{P}{k^2 n}$$

Espressioni che sostituite nella (ES.24) determinano completamente tutte le reazioni vincolari:

$$\Phi_s = \left(\frac{x_s x^*}{B} + \frac{y_s y^*}{A} + \frac{1}{n} \right) P \quad (\text{ES.27})$$

• Notiamo come, grazie alla dipendenza lineare, da z , delle reazioni vincolari, la costante elastica del terreno scompare dall'espressione finale delle reazioni vincolari.

• Inoltre va tenuto presente che le espressioni ottenute sono valide rispetto al sistema di assi cartesiani che abbiamo scelto; con una scelta diversa le espressioni risultano molto più complicate.

• Se il centro di pressione coincide con l'origine degli assi, cioè con il baricentro delle masse unitarie (ovvero con il baricentro geometrico del poligono di appoggio) le reazioni vincolari risultano tutte uguali e valgono $\frac{1}{n} P$.

Dal punto di vista operativo va osservato che, nel corso del calcolo delle reazioni vincolari, può accadere che qualche reazione risulti nulla o negativa. Se la reazione è nulla ciò significa che il corpo non appoggia in quel punto, in quanto il vincolo non riceve alcuna sollecitazione in base alla quale reagire: si tratta di un punto di distacco, che deve essere escluso dal poligono di appoggio. Se la reazione risulta essere negativa è come se il vincolo dovesse esercitare una reazione vincolare in verso opposto a quella che può effettivamente esplicare: il corpo anziché appoggiare in quel punto dovrebbe essere sottoposto a trazione per rimanere in equilibrio. Anche questo caso va escluso in quanto non vi è appoggio in quel punto. Eliminati, dunque i punti in cui non vi è appoggio si costruisce il nuovo poligono di appoggio e si procede al calcolo delle reazioni vincolari fino a che tutte risultano essere positive.

Insieme continuo di punti di appoggio

Esaminiamo ora l'estensione al caso in cui l'insieme dei punti di appoggio costituisca un insieme *continuo* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Nel caso del continuo anche le reazioni vincolari non costituiscono più un insieme discreto, ma devono

essere rappresentate mediante una *legge di distribuzione differenziale*. Per cui ad ogni elemento della superficie di appoggio dS viene associato un contributo infinitesimo di reazione vincolare:

$$d\Phi = \pi dS$$

La funzione:

$$\pi = \frac{d\Phi}{dS}$$

può essere integrata su una porzione finita \mathcal{S} della superficie a cui il corpo è appoggiato, ottenendo la reazione vincolare risultante esercitata da quella porzione di piano di appoggio:

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \pi dS$$

La funzione π ha le dimensioni di una forza per unità di superficie, cioè di una pressione e viene a rappresentare la *pressione vincolare*, cioè la pressione che il vincolo deve esercitare sul corpo, nei punti della superficie di appoggio, per mantenerlo in equilibrio ed è opposta alla pressione che il corpo esercita sul vincolo nello stesso punto.

Per trattare il problema dobbiamo generalizzare al caso continuo la definizione di *poligono di appoggio*. Avremo questa volta un'*area di appoggio*.

Si definisce *area di appoggio* un dominio $\mathcal{D} \subset R^2$ che ha le seguenti tre proprietà:

- i) i punti della frontiera di \mathcal{D} sono tutti dei punti di appoggio;
- ii) i punti di appoggio che non sono punti di frontiera si trovano non esternamente a \mathcal{D} ;

iii) il dominio \mathcal{D} è convesso.

Osserviamo che come conseguenza della convessità di \mathcal{D} esso risulta anche semplicemente connesso. Evidentemente la dimostrazione della condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del corpo rimane identica a quella svolta per il caso discreto.

Ai fini della determinazione della pressione vincolare, in funzione delle coordinate del punto di appoggio, occorre fare sempre le ipotesi relative alla cedevolezza del suolo, in quanto il numero di appoggi risulta sempre infinito.

Denotando:

$$\boldsymbol{\pi} = \pi \mathbf{c}_3, \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{c}_3$$

le equazioni cardinali della statica si scrivono:

$$\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\pi} dS + \mathbf{P} = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}} \Omega A \wedge \boldsymbol{\pi} dS + \Omega C^* \wedge \mathbf{P} = 0$$

essendo A il generico punto di appoggio. Queste, proiettate sugli assi cartesiani, si riconducono, mediante la legge di elasticità lineare:

$$\pi = -\kappa^2 z$$

al sistema:

$$\begin{cases} \kappa^2 S x_G a + \kappa^2 S y_G b + \kappa^2 S c + P = 0 \\ \kappa^2 C' a + \kappa^2 A b + \kappa^2 S y_G c + y^* P = 0 \\ \kappa^2 B a + \kappa^2 C' b + \kappa^2 S x_G c + x^* P = 0 \end{cases} \quad (\text{ES.28})$$

dove:

$$x_G = \frac{1}{S} \int_{\mathcal{D}} x \, dS, \quad y_G = \frac{1}{S} \int_{\mathcal{D}} y \, dS, \quad S = \int_{\mathcal{D}} dS$$

$$A = \int_{\mathcal{D}} y^2 \, dS, \quad B = \int_{\mathcal{D}} x^2 \, dS, \quad C' = \int_{\mathcal{D}} xy \, dS$$

nello stesso modo del caso discreto. In luogo del sistema discreto di masse unitarie si sceglie qui una distribuzione fittizia di materia di *densità unitaria* e si giunge, seguendo la stessa procedura esaminata per il caso discreto, a determinare la pressione vincolare in funzione delle coordinate del punto di appoggio:

$$\pi(x, y) = \left(\frac{x x^*}{B} + \frac{y y^*}{A} + \frac{1}{S} \right) P \quad (\text{ES.29})$$

Equilibrio di un tavolo

Come esempio di equilibrio di un corpo rigido pesante appoggiato a un piano orizzontale liscio, consideriamo un tavolo rettangolare con quattro punti di appoggio, di lati $2a$ e $2b$.

In questo caso $n = 4$; il poligono di appoggio è costituito dal rettangolo i cui vertici sono i quattro punti di appoggio. Inoltre è immediato identificare il sistema di riferimento con l'origine nel baricentro delle masse unitarie fittizie e gli assi x, y coincidenti con gli assi principali d'inerzia, come rappresentato in fig. (ES. 10). Le reazioni vincolari sono date allora da:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{x^*}{a} + \frac{y^*}{b} + 1 \right) P, \quad \Phi_2 = \frac{1}{4} \left(-\frac{x^*}{a} + \frac{y^*}{b} + 1 \right) P$$

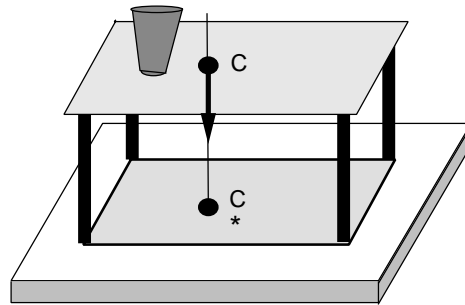


Figura ES. 10: equilibrio di un tavolo

$$\Phi_3 = \frac{1}{4} \left(-\frac{x^*}{a} - \frac{y^*}{b} + 1 \right) P, \quad \Phi_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{x^*}{a} - \frac{y^*}{b} + 1 \right) P$$

Osserviamo che il confine a partire dal quale le reazioni si annullano per poi cambiare segno, cioè a partire dal quale avviene il distacco nei rispettivi punti di appoggio, è dato dall'intersezione del poligono di appoggio con le rette di equazioni rispettive:

$$\frac{x^*}{a} + \frac{y^*}{b} + 1 = 0, \quad \text{distacco in } A_1$$

$$-\frac{x^*}{a} + \frac{y^*}{b} + 1 = 0, \quad \text{distacco in } A_2$$

$$-\frac{x^*}{a} - \frac{y^*}{b} + 1 = 0, \quad \text{distacco in } A_3$$

$$\frac{x^*}{a} - \frac{y^*}{b} + 1 = 0, \quad \text{distacco in } A_4$$

Si può allora identificare l'*area di completo appoggio* come il luogo dei punti che, assunti come centri di pressione, comportano reazioni vincolari

tutte positive. Nel caso in esame quest'area è rappresentata dal rombo ombreggiato nella fig. (ES. 11).

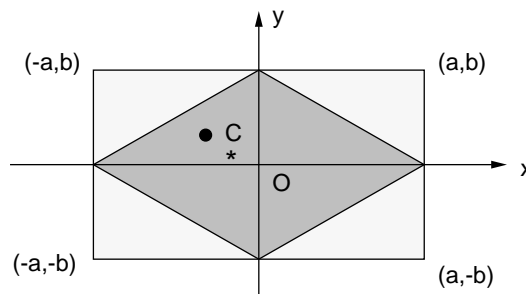


Figura ES. 11: area di completo appoggio del tavolo

Equilibrio della scala

A conclusione del capitolo esaminiamo un problema di equilibrio in cui la presenza dell'attrito è indispensabile perchè si realizzino configurazioni di equilibrio significative dal punto di vista pratico: si tratta del problema dell'equilibrio della scala. Schematizziamo la scala come un corpo rigido soggetto alla forza peso, in modo da fare uso delle equazioni cardinali della statica come condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio, e supponiamo che il pavimento e la parete su cui la scala viene appoggiata siano dotati di attrito, con coefficienti che possono risultare anche diversi per le due superfici. Nei punti di appoggio sono applicate le reazioni vincolari. Sotto le ipotesi che:

- la scala sia omogenea;
- il carico sia simmetrico rispetto all'asse della scala;
- le superfici di appoggio siano omogenee

il problema presenta una simmetria rispetto all'asse longitudinale della scala. In tale situazione le reazioni vincolari e il carico si possono ridurre a sistemi di forze applicate sull'asse, e il problema da tridimensionale si riconduce a un problema bidimensionale.

Affinchè il vincolo non sia impossibilitato a realizzare l'equilibrio occorre e basta che la retta d'azione del risultante delle forze attive abbia punti comuni con l'intersezione degli angoli d'attrito (intersezione tra i coni d'attrito e il piano di simmetria della scala) relativi al pavimento e alla parete. In tal modo il vincolo non è impossibilitato ad esplicitare un risultante delle reazioni vincolari che formi una coppia di braccio nullo con il risultante delle forze attive. In generale il problema è staticamente indeterminato, perchè esiste un intero segmento di punti di intersezione. Nel caso in cui la parete sia priva di attrito si ha invece un solo punto di intersezione possibile. Notiamo che è indispensabile che il pavimento sia dotato di attrito, altrimenti la scala può stare in equilibrio solo verticalmente appoggiata al muro o orizzontalmente distesa sul pavimento, posizioni ovviamente di nessuna utilità pratica.