LV. Principio dei lavori virtuali

Passiamo ora dalla statica del punto alla statica dei sistemi di punti materiali. Anzitutto ci occorre una *definizione di equilibrio* per un *sistema di punti materiali.*

Si dice che un sistema di punti materiali è in equilibrio se e solo se ogni suo punto è in equilibrio

Quando consideriamo un sistema di punti materiali $\mathcal{S}$ (che esemplificativamente consideriamo discreto), in cui possono essere presenti vincoli, può essere conveniente suddividerlo in due sottosistemi: il primo che denotiamo con $\mathcal{S}_\ell$ comprendente i punti liberi, cioè *non vincolati* appartenenti al sistema complessivo $\mathcal{S}$, e il secondo, che denotiamo con $\mathcal{S}_v$ comprendente i punti vincolati; cosicchè risulta:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\ell \cup \mathcal{S}_v, \qquad\qquad \mathcal{S}_\ell \cap \mathcal{S}_v = \emptyset$$

Allora dire che l'intero sistema è in equilibrio equivale a dire che sussistono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_\ell \\ \\ \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{\Phi}_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_v \end{cases} \tag{LV.1}$$

Introdotta la nozione di equilibrio di un sistema di punti si possono sviluppare due metodologie per la ricerca delle configurazioni di equilibrio:

— la prima metodologia è offerta dal *principio dei lavori virtuali;*

— la seconda metodologia è data dalle *equazioni cardinali della statica.*

Svilupperemo entrambe le metodologie per poi applicarle ai corpi rigidi e ai sistemi olonomi. In questo capitolo ci occupiamo del principio dei lavori virtuali: esso offre il *vantaggio* di chiamare in causa solamente le *forze attive* ai fini della determinazione delle configurazioni di equilibrio di un sistema, ignorando le reazioni vincolari, che sono normalmente delle incognite aggiuntive rispetto al problema dell'equilibrio. Ha come *limitazione* il fatto di richiedere l'ipotesi che i vincoli siano lisci, ai fini della determinazione di tutte le configurazioni di equilibrio di un sistema. Lo enunciamo.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema meccanico a vincoli lisci sia in equilibrio in una configurazione C^* è che il lavoro virtuale delle forze attive sia non positivo, per ogni spostamento virtuale compiuto a partire da C^*. In particolare il lavoro risulterà nullo per tutti gli spostamenti reversibili effettuati a partire da C^*

In formula possiamo scrivere la condizione espressa dal principio dei lavori virtuali come:

$$\boxed{\delta L^{(a)} \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s} \tag{LV.2}$$

E in particolare risulterà:

$$\delta L^{(a)} = 0, \qquad \forall\, \delta P_s \;\; reversibili \tag{LV.3}$$

dove il lavoro virtuale delle forze attive è, per definizione:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s \tag{LV.4}$$

• Notiamo subito che la condizione (LV.3) sul lavoro relativo agli spostamenti reversibili è una conseguenza della condizione generale (LV.2) e della definizione di spostamento reversibile. Infatti se facciamo compiere al sistema gli spostamenti:

$$\delta P_1, \delta P_2, \cdots, \delta P_n$$

la richiesta che tali spostamenti siano reversibili equivale a dire che anche gli spostamenti opposti:

$$-\delta P_1, -\delta P_2, \cdots, -\delta P_n$$

risultano essere spostamenti virtuali, cioè spostamenti compatibili con i vincoli che non tengono conto dell'eventuale evoluzione nel tempo dei vincoli. Ora se la condizione (LV.2), all'equilibrio, viene soddisfatta da *tutti* gli spostamenti virtuali, allora dovrà risultare contemporaneamente vera anche per gli spostamenti opposti a quelli considerati. Quindi devono sussistere insieme le condizioni:

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s \leq 0$$

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s \geq 0$$

in quanto il lavoro per gli spostamenti opposti è:

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times (-\delta P_s) = -\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s$$

E il sistema delle disuguaglianze precedenti può essere soddisfatto se e solo se risulta verificata la (LV.3). Passiamo alla dimostrazione del principio dei lavori virtuali.

DIMOSTRAZIONE

condizione necessaria

Dire che la condizione (LV.2) è *necessaria* per l'equilibrio di un sistema a vincoli lisci in una configurazione C^* equivale a dire che: se c'è l'equilibrio *necessariamente* segue la conseguenza (LV.2). Dunque la dimostrazione della condizione necessaria equivale alla dimostrazione del teorema:

$$\mathit{equilibrio} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta L^{(a)} \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

Ovvero, in base alla definizione di equilibrio di un sistema di punti materiali:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_\ell \\ \\ \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{\Phi}_s = 0, \forall\, P_s \in \mathcal{S}_v \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta L^{(a)} \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

dove $\mathcal{S}_\ell$ è l'insieme dei punti liberi e $\mathcal{S}_v$ quello dei punti vincolati.

Il lavoro delle forze attive si può pensare come dovuto a due contributi: uno esplicato dalle forze applicate ai punti non vincolati $P_s \in \mathcal{S}_\ell$ e il secondo esplicato dalle forze applicate ai punti vincolati $P_s \in \mathcal{S}_v$. Così possiamo scrivere:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s = \sum_{P_s \in \mathcal{S}_\ell} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s + \sum_{P_s \in \mathcal{S}_v} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s$$

Dal momento che per ipotesi i punti liberi sono in equilibrio e cioè:

$$\boldsymbol{F}_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_\ell$$

segue:

$$\sum_{P_s \in \mathcal{S}_\ell} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s = 0$$

E quindi rimane:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{P_s \in \mathcal{S}_v} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s$$

Facendo intervenire l'ipotesi relativa all'equilibrio dei punti vincolati:

$$\boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{\Phi}_s = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{F}_s = -\boldsymbol{\Phi}_s, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_v$$

otteniamo:

$$\delta L^{(a)} = -\sum_{P_s \in \mathcal{S}_v} \boldsymbol{\Phi}_s \times \delta P_s = -\delta L^{(v)}$$

Dunque:

$$\delta L^{(a)} = -\delta L^{(v)}, \qquad \forall\, \delta P_s$$

essendo $\delta L^{(v)}$ il lavoro delle reazioni vincolari, dal momento che solo nei punti $P_s \in \mathcal{S}_v$ sono presenti le reazioni vincolari. Ma il sistema meccanico che stiamo considerando è un sistema a *vincoli lisci* e quindi, per esso vale il *principio delle reazioni vincolari* che ci assicura che:

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

Di conseguenza:

$$\delta L^{(a)} = -\delta L^{(v)} \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

e risulta verificata la tesi. Sottolineiamo l'indispensabilità dell'informazione relativa ai vincoli lisci per dimostrare la condizione necessaria.

condizione sufficiente

Dire che la condizione (LV.2) è *sufficiente* per l'equilibrio di un sistema a vincoli lisci equivale a dire che: è *sufficiente* che risulti verificata la (LV.2) affinchè il sistema sia in equilibrio. Dunque la dimostrazione della condizione sufficiente equivale alla dimostrazione del teorema:

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s \qquad \Longrightarrow \qquad equilibrio$$

Ovvero:

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \boldsymbol{F}_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_\ell \\ \\ \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{\Phi}_s = 0, \forall\, P_s \in \mathcal{S}_v \end{cases}$$

dove rispetto alla condizione necessaria l'ipotesi e la tesi sono state scambiate.

Dal momento che la (LV.2) è soddisfatta, per ipotesi, per tutti gli spostamenti virtuali a partire da una configurazione C^*, in particolare dovrà risultare verificata per la particolare classe di spostamenti $\mathcal{C}_0$ che lascia invariati i punti vincolati e sposta arbitrariamente i punti liberi:

$$\begin{cases} \delta P_s \;\; arbitrari, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_\ell \\ \\ \delta P_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_v \end{cases}$$

Notiamo che questi spostamenti, per come sono stati definiti, sono *spostamenti reversibili* in quanto i punti liberi, che sono gli unici a poter compiere spostamenti non nulli, possono muoversi senza limitazioni sullo spostamento e quindi, per ogni spostamento anche l'opposto risulta permesso.

Per questa classe di spostamenti reversibili l'ipotesi (LV.2) risulta quindi verificata come uguaglianza:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{P_s \in \mathcal{S}_\ell} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s = 0, \qquad \forall\, \delta P_s \in \mathcal{C}_0 \tag{LV.5}$$

Dal momento che $\delta P_s \in \mathcal{C}_0$ è arbitrario per ogni punto libero $P_s \in \mathcal{S}_\ell$ la condizione (LV.5) deve valere anche considerando uno spostamento particolare che è arbitrario solo per un punto $P_{\bar{s}}$ tra i punti liberi, mentre lascia invariati tutti i rimanenti; cioè:

$$\begin{cases} \delta P_{\bar{s}} \;\; arbitrario \\ \\ \delta P_s = 0, \qquad per \;\; s \neq \bar{s} \end{cases}$$

Per questo spostamento particolare la condizione sul lavoro delle forze attive (LV.5) diventa:

$$\boldsymbol{F}_{\bar{s}} \times \delta P_{\bar{s}} = 0, \qquad \forall\, \delta P_{\bar{s}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |F_{\bar{s}}||\delta P_{\bar{s}}|\, cos\, \vartheta_{\bar{s}} = 0$$

Dal momento che $\delta P_{\bar{s}}$ è arbitrario, il prodotto scalare può annullarsi se e solo se:

$$\boldsymbol{F}_{\bar{s}} = 0, \qquad P_{\bar{s}} \in \mathcal{S}_\ell \tag{LV.6}$$

Data l'arbitrarietà nella scelta di $\bar{s}$ abbiamo così ottenuto l'informazione che tutti i punti non vincolati del sistema sono in equilibrio. Osserviamo che le forze dipendono dalle posizioni dei punti e dal tempo, ma non dagli spostamenti δP_s, per cui le (LV.6) sono valide indipendentemente dagli spostamenti virtuali che si effettuano. Allora possiamo considerare il lavoro delle forze attive in corrispondenza di qualsiasi spostamento virtuale, e questo risulterà uguale, grazie alle (LV.6) al lavoro delle sole forze agenti sui punti vincolati. Di conseguenza in forza dell'ipotesi (LV.2), tenendo conto che in generale gli spostamenti possono essere anche irreversibili, abbiamo:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{P_s \in \mathcal{S}_v} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s \tag{LV.7}$$

Ora introduciamo i simboli di comodo:

$$\boldsymbol{\Phi}_s^* = -\boldsymbol{F}_s \tag{LV.8}$$

che rappresentano le forze che sarebbero necessarie a mantenere in equilibrio i punti vincolati $P_s \in \mathcal{S}_v$ e ci chiediamo se i vincoli del nostro sistema sono in grado di esplicare tali forze. Per rispondere a questo interrogativo introduciamo la definizione (LV.8) nella condizione sui lavori (LV.7), ottenendo:

$$\delta L^{(a)} = -\sum_{P_s \in \mathcal{S}_v} \boldsymbol{\Phi}_s^* \times \delta P_s = -\delta L^* \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

dove δL^* denota il lavoro delle $\boldsymbol{\Phi}_s^*$.

Abbiamo finalmente ottenuto il seguente risultato:

$$\delta L^* \geq 0, \qquad \forall\, \delta P_s \tag{LV.9}$$

Ma stiamo lavorando con un sistema a *vincoli lisci* e per il *principio delle reazioni vincolari* che definisce i vincoli lisci sappiamo che:

Si dicono lisci quei vincoli che sono capaci di esplicare tutte e solamente *quelle forze (reazioni vincolari) il cui lavoro virtuale risulta non negativo, per ogni spostamento virtuale.* E quindi, come è già stato osservato in precedenza, se in un sistema a vincoli lisci si incontrano delle forze che esplicano lavoro non negativo, per qualunque spostamento virtuale, queste non possono che essere reazioni vincolari. Di conseguenza la (LV.9) comporta che i vincoli esplicano effettivamente le forze necessarie a mantenere in equilibrio i punti vincolati del sistema. Dunque:

$$\boldsymbol{\Phi}_s^* = \boldsymbol{\Phi}_s$$

E quindi la (LV.8) è effettivamente la condizione di equilibrio:

$$\boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{\Phi}_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in \mathcal{S}_v$$

E la tesi risulta completamente dimostrata.

condizioni di sicurezza

Se il vincolo non è liscio certamente ci troviamo in presenza di attrito. Abbiamo già osservato che se non vale il principio delle reazioni vincolari la *condizione necessaria* del principio dei lavori virtuali non è valida. Fisicamente questo si spiega perchè, come l'esperienza dimostra, l'attrito rende possibili delle configurazioni di equilibrio che non sarebbero tali in presenza di vincoli lisci.

La sufficienza del principio dei lavori virtuali rimane, invece, valida anche in presenza di vincoli non lisci. Infatti essa permette di determinare solo quelle configurazioni che sono di equilibrio quando il vincolo è liscio; ma se il vincolo non è liscio certamente vi è attrito, e l'esperienza mostra che l'attrito non elimina le configurazioni che sono di equilibrio anche col vincolo liscio, ma ne aggiunge ad esse delle altre. Trattare un vincolo che non è liscio come se fosse tale è allora una *condizione di sicurezza,* perchè la presenza dell'attrito favorisce l'equilibrio e quindi, se vi è equilibrio col vincolo liscio, a maggior ragione vi sarà quando il vincolo non è liscio. In conclusione:

• Il principio dei lavori virtuali costituisce una *condizione necessaria e sufficiente* per l'equilibrio in presenza di *vincoli lisci* e una condizione solo *sufficiente* se i vincoli *non sono lisci.*

Equilibrio di un corpo rigido

Osserviamo, preliminarmente, che quando si applica il principio dei lavori virtuali la prima verifica da fare riguarda la natura dei vincoli del sistema: bisogna verificare se i vincoli sono lisci oppure non lo sono. Se i vincoli risultano essere lisci allora il principio dei lavori virtuali vale come condizione necessaria e sufficiente e la condizione (LV.2) serve a determinare *tutte* le configurazioni di equilibrio del sistema. Diversamente la (LV.2) fornisce una condizione solo sufficiente e determina solo *alcune* delle possibili configurazione di equilibrio, e sono quelle che si avrebbero anche se il vincolo fosse liscio.

lavoro delle forze interne

Volendoci occupare ora dell'equilibrio di un corpo rigido, facendo uso del principio dei lavori virtuali, verifichiamo anzitutto che il *vincolo di rigidità* è un vincolo liscio. Questo si può dimostrare facendo due osservazioni:

— *le forze interne* in un corpo rigido sono le forze di mutua interazione tra le particelle del corpo, le quali realizzano il vincolo di rigidità. Dunque in un corpo rigido le forze interne sono tutte di natura vincolare.

— *Le forze interne in un corpo rigido compiono lavoro nullo.*

Questo importante risultato si ottiene ricordando che il lavoro di qualunque sistema di forze applicate ai punti di un corpo rigido è dato da:

$$dL = \boldsymbol{R} \times d\Omega + \boldsymbol{M}_{\Omega} \times d\boldsymbol{\psi}$$

dove d indica indifferentemente il lavoro virtuale o il lavoro possibile che coincidono dal momento che il vincolo di rigidità non dipende dal tempo.

Ma per il *terzo principio della dinamica,* che vale per qualunque sistema materiale (e non solo per i corpi rigidi!) le forze interne costituiscono un sistema di coppie di braccio nullo e quindi hanno risultante e momento risultante nulli:

$$\boldsymbol{R}^{(i)} = 0, \qquad \boldsymbol{M}_{\Omega}^{(i)} = 0$$

Di conseguenza il lavoro delle forze interne in un corpo rigido diventa:

$$dL^{(i)} = \boldsymbol{R}^{(i)} \times d\Omega + \boldsymbol{M}_{\Omega}^{(i)} \times d\boldsymbol{\psi} = 0 \tag{LV.10}$$

Se il corpo non fosse rigido il lavoro delle forze interne non sarebbe nullo, se non quando il corpo viene sottoposto a soli spostamenti rigidi, cioè a spostamenti che conservano le mutue distanze fra le particelle. Diversamente il lavoro delle forze interne dipenderà dalla variazione delle distanze fra le particelle del corpo.

E quindi risulta verificato anche che il lavoro virtuale delle forze vincolari interne che realizzano il vincolo di rigidità, essendo uguale al lavoro delle forze interne, è nullo e soddisfa dunque il principio delle reazioni vincolari. E quindi il vincolo di rigidità è liscio.

Dalla prima osservazione fatta viene pure la conseguenza che in un corpo rigido le *forze attive* possono essere solo *forze esterne* dal momento che le forze interne sono tutte di natura vincolare. Di conseguenza:

$$\delta L^{(a)} = \delta L^{(e,a)}$$

• In un corpo rigido il principio dei lavori virtuali si traduce nella condizione sulle sole forze esterne attive:

$$\boldsymbol{R}^{(e,a)} \times \delta\Omega + \boldsymbol{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \delta\boldsymbol{\psi} \leq 0, \qquad \forall\, \delta\Omega, \delta\boldsymbol{\psi} \tag{LV.11}$$

In particolare per spostamenti reversibili la condizione (LV.11) risulta verificata come uguaglianza.

corpo rigido con un punto fisso

Abbiamo appena verificato che il vincolo di rigidità è liscio; in precedenza avevamo verificato anche che un punto fisso rappresenta un vincolo liscio per un corpo rigido. Dunque possiamo concludere che un corpo rigido con un punto fisso è soggetto a vincoli lisci.

Scegliendo Ω coincidente con il punto fisso del corpo l'espressione del lavoro si riduce al solo lavoro del momento risultante e la condizione di equilibrio (LV.11) diventa semplicemente:

$$\boldsymbol{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \delta\boldsymbol{\psi} = 0, \qquad \forall\, \delta\boldsymbol{\psi} \tag{LV.12}$$

L'uguaglianza è giustificata per il fatto che gli spostamenti, che sono rotazioni attorno ad un asse passante per Ω, sono tutti reversibili, in quanto il vincolo blocca i parametri di traslazione del corpo, ma non fornisce alcuna limitazione sui parametri di rotazione. Data l'arbitrarietà completa di $\delta\boldsymbol{\psi}$ la (LV.12) può essere soddisfatta se e solo se:

$$\boxed{\boldsymbol{M}_{\Omega}^{(e,a)} = 0} \tag{LV.13}$$

Questa rappresenta dunque la condizione di equilibrio per un corpo rigido con un punto fisso.

• Condizione necessaria e sufficiente perchè un corpo rigido con un punto fisso sia in equilibrio è che il momento delle forze esterne attive ad esso applicate, calcolato rispetto al punto fisso preso come polo di riduzione, sia nullo.

Se prendiamo, per esempio, una singola forza attiva $(P, \boldsymbol{F})$ agente sul corpo, affinchè il suo momento rispetto ad Ω sia nullo, e quindi il corpo sia in equilibrio deve accadere che:

$$\Omega P \wedge \boldsymbol{F} = 0$$

ovvero la forza, supposta non nulla, deve avere la retta d'azione passante per Ω, in quanto ΩP risulta parallelo ad $\boldsymbol{F}$ e quest'ultimo è applicato in P.

Per determinare le configurazioni di equilibrio del corpo si proietta la condizione vettoriale (LV.13) su un sistema di assi cartesiani che può essere conveniente scegliere con l'origine nel punto fisso:

$$\begin{cases} M_x^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) = 0 \\ \\ M_y^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) = 0 \\ \\ M_z^{(e,a)}(\vartheta, \varphi, \psi, t) = 0 \end{cases} \tag{LV.14}$$

Si ottengono in questo modo tre equazioni per le tre incognite costituite dai tre gradi di libertà del corpo rigido con un punto fisso, che generalmente si identificano con gli angoli di Eulero. Le soluzioni del sistema sono le configurazioni di equilibrio cercate.

corpo rigido con un asse fisso

Consideriamo ora un corpo rigido con un intera retta solidale fissa (asse fisso). Assumiamo, analogamente a quanto abbiamo fatto per il caso del corpo rigido con un punto fisso, che l'asse fisso non abbia struttura e si possa quindi schematizzare con una retta geometrica, dotata di una sola dimensione. In tal caso il vincolo risulta essere liscio. Infatti le reazioni vincolari sono applicate sulla retta, ove risiede il vincolo, e i loro punti di applicazione sono punti fissi del corpo, per cui il lavoro delle reazioni vincolari è sempre nullo e il principio delle reazioni vincolari risulta verificato. Il principio dei lavori virtuali esprime allora una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio e consente di individuare *tutte* le configurazioni di equilibrio del corpo.

Scegliendo il punto Ω sull'asse fisso, possiamo specializzare la condizione di equilibrio (LV.11) nella forma:

$$\boldsymbol{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \delta\boldsymbol{\psi} = 0, \qquad \forall\, \delta\boldsymbol{\psi} \tag{LV.15}$$

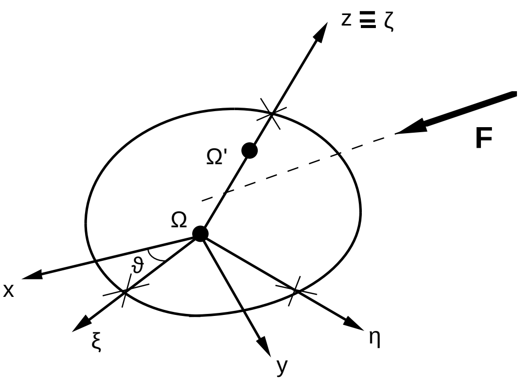

Figura LV. 1: equilibrio di un corpo rigido con un asse fisso

Gli spostamenti virtuali sono le rotazioni attorno all'asse fisso e sono tutti reversibili; questo giustifica la condizione di equilibrio sotto forma di uguaglianza.

Dobbiamo ora introdurre nella condizione di equilibrio (LV.15) l'informazione relativa la fatto che le rotazioni $\delta\boldsymbol{\psi}$ hanno la direzione del versore $\boldsymbol{c}_3$ dell'asse fisso. Possiamo esprimere questa informazione nel modo seguente:

$$\delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{c}_3\,\delta\vartheta, \qquad\qquad \delta\vartheta = \pm|\delta\boldsymbol{\psi}|$$

dove ϑ è l'angolo di rotazione del corpo attorno all'asse fisso, rispetto al sistema di assi dell'osservatore, ed è l'unico grado di libertà del problema. Il segno $\pm$ esprime la *reversibilità* dello spostamento virtuale. La condizione di equilibrio (LV.15) si riscrive allora:

$$\boldsymbol{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \boldsymbol{c}_3\,\delta\vartheta = M_z^{(e,a)}\delta\vartheta = 0, \qquad \forall\,\delta\vartheta$$

E viene soddisfatta se e solo se:

$$\boxed{M_z^{(e,a)}(\vartheta, t) = 0} \tag{LV.16}$$

essendo $M_z^{(e,a)}$ il momento assiale delle forze attive, relativo all'asse fisso z. La condizione (LV.16) è una sola equazione per l'unico grado di libertà ϑ e le sue soluzioni rappresentano le configurazioni di equilibrio del corpo.

• Condizione necessaria e sufficiente perchè un corpo rigido con un asse fisso sia in equilibrio è che il momento assiale delle forze esterne attive ad esso applicate, calcolato rispetto all'asse fisso, sia nullo.

Se per esempio consideriamo una forza attiva sola $(P, \boldsymbol{F})$, affinchè essa soddisfi la condizione di equilibrio (LV.16), per la definizione del momento assiale, deve risultare:

$$\Omega P \wedge \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{c}_3 = 0$$

condizione che richiede la complanarità dei tre vettori $\Omega P, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{c}_3$. E dal momento che Ω appartiene all'asse fisso e P alla retta d'azione della forza, segue che la retta d'azione della forza e l'asse fisso devono essere complanari.

Quindi affinchè il corpo stia in equilibrio sotto l'azione di una sola forza esterna attiva occorre e basta che la retta d'azione della forza sia parallela oppure incidente rispetto all'asse fisso.

corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa

Consideriamo ora, come terzo caso significativo, l'equilibrio del corpo rigido che può ruotare e scorrere lungo una semiretta solidale con l'osservatore (semiretta fissa) ma non solidale con il corpo rigido.

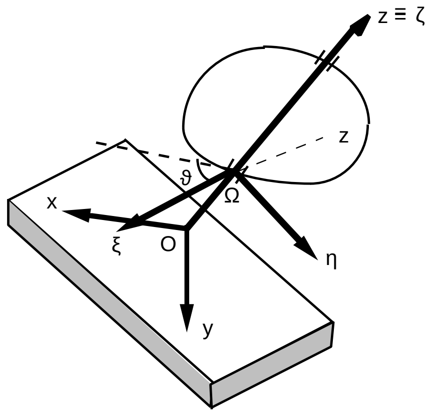

Figura LV. 2: equilibrio di un corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa

In questo caso affinchè i vincoli siano lisci occorre assumere che siano privi di attrito i cursori sui quali il corpo scorre lungo la semiretta e sia liscio il vincolo unilaterale che limita la traslazione del corpo lungo la semiretta; ad esempio sia costituito da una superficie priva di attrito. Sotto questa ipotesi il principio dei lavori virtuali è condizione necessaria e sufficiente per determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema. L'interesse di questo esempio sta nel fatto che, essendo presente un vincolo unilaterale, dobbiamo esaminare anche le configurazioni di confine.

Scegliamo il punto Ω del corpo rigido in modo che si trovi sulla retta solidale del corpo che trasla lungo la semiretta fissa e denotiamo con z la sua posizione lungo la semiretta fissa, assumendo che per $z = 0$ il corpo si trovi al confine, mentre con ϑ al solito indichiamo il parametro di rotazione del corpo. Il problema ha due gradi di libertà e sussiste la limitazione:

$$z \geq 0$$

che caratterizza la presenza del vincolo unilaterale. La condizione di equilibrio (LV.11) va specializzata introducendo le informazioni relative al vincolo, cioè al fatto che la semiretta z ha direzione fissa data dal versore $\boldsymbol{c}_3$:

$$\delta\Omega = \boldsymbol{c}_3\,\delta z, \qquad\qquad \delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{c}_3\,\delta\vartheta$$

Segue che la condizione di equilibrio si riscrive:

$$\boldsymbol{R}^{(e,a)} \times \boldsymbol{c}_3\,\delta z + \boldsymbol{M}_{\Omega}^{(e,a)} \times \boldsymbol{c}_3\,\delta\vartheta \leq 0, \qquad \forall\,\delta z, \delta\vartheta$$

Ovvero:

$$R_z^{(e,a)}\,\delta z + M_z^{(e,a)}\,\delta\vartheta \leq 0, \qquad \forall\,\delta z, \delta\vartheta \tag{LV.17}$$

Distinguiamo il ora caso in cui il corpo si trovi in configurazione ordinaria, cioè non a contatto con la barriera unilaterale, dal caso in cui si trovi in configurazione di confine, cioè a contatto.

a) *configurazioni ordinarie:* $z > 0$

In questa situazione tutti gli spostamenti sono reversibili e la condizione di equilibrio (LV.17) si scrive come uguaglianza:

$$R_z^{(e,a)}\,\delta z + M_z^{(e,a)}\,\delta\vartheta = 0, \qquad \forall\,\delta z, \delta\vartheta \tag{LV.18}$$

Scegliendo uno spostamento particolare per il quale risulti $\delta z = 0$ e $\delta\vartheta$ arbitrario tale condizione comporta:

$$M_z^{(e,a)}\,\delta\vartheta = 0, \qquad \forall\,\delta\vartheta \qquad M_z^{(e,a)} = 0$$

informazione che introdotta nella (LV.18) fornisce:

$$R_z^{(e,a)}\,\delta z = 0, \qquad \forall\,\delta z \qquad R_z^{(e,a)} = 0$$

• Condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione ordinaria sia di equilibrio per il corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa è che:

$$\boxed{R_z^{(e,a)}(z,\vartheta,t) = 0, \qquad M_z^{(e,a)}(z,\vartheta,t) = 0, \qquad z > 0} \tag{LV.19}$$

Notiamo che solo le soluzioni che rispettano il vincolo, cioè la condizione $z > 0$ sono configurazioni ordinarie di equilibrio.

b) *configurazioni di confine:* $z = 0, \delta z \geq 0$

Le configurazioni di confine sono caratterizzate dal vincolo per le configurazioni $z = 0$ e dal conseguente vincolo per gli spostamenti $\delta z \geq 0$.

Di conseguenza le rotazioni che sono caratterizzate da:

$$\delta z = 0, \qquad\qquad \delta\vartheta \;\; arbitrario$$

sono gli unici spostamenti reversibili, mentre gli spostamenti traslatori e rototralsatori sono irreversibili. Allora la condizione (LV.17) nel caso di spostamenti reversibili, cioè puramente rotatori, comporta, come già nel caso precedente, l'annullarsi del momento assiale delle forze esterne attive:

$$M_z^{(e,a)} = 0$$

Questa informazione, introdotta nella (LV.17) ci dà di conseguenza:

$$R_z^{(e,a)}\, \delta z \leq 0, \qquad \forall\, \delta z \geq 0$$

Essendo $\delta z \geq 0$, a causa del vincolo unilaterale, la condizione precedente può essere soddisfatta se e solo se:

$$R_z^{(e,a)} \leq 0$$

• Condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione di confine sia di equilibrio per il corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa è che:

$$\boxed{R_z^{(e,a)}(0, \vartheta, t) \leq 0, \qquad M_z^{(e,a)}(0, \vartheta, t) = 0} \tag{LV.20}$$

Si noti che al posto della variabile z si è posto il suo valore al confine che è 0.

Nel caso che abbiamo una sola forza attiva $(P, \boldsymbol{F})$ non nulla alla condizione dell'annullarsi del momento assiale, determinata nel caso del corpo rigido con un asse fisso, occorre aggiungere la condizione sul risultante. Quindi affinchè il corpo stia in equilibrio sotto l'azione della forza, oltre a richiedere che la retta d'azione della forza sia complanare con la semiretta fissa, dobbiamo avere, per le configurazioni ordinarie che la forza sia ortogonale alla semiretta, e in configurazioni di confine, che la forza abbia componente z non positiva. La forza deve in questo caso puntare contro la barriera unilaterale oppure essere normale alla semiretta fissa, per mantenere l'equilibrio.

Equilibrio di un sistema olonomo

Vediamo ora come il *principio dei lavori virtuali* può essere utilizzato per la ricerca delle configurazioni di equilibrio di un *sistema olonomo* a vincoli lisci.

Ricordando l'espressione del lavoro virtuale per un sistema olonomo a N gradi di libertà possiamo esprimere il lavoro virtuale delle forze attive nella forma:

$$\delta L^{(a)} = \boldsymbol{Q} \times \delta \boldsymbol{q} \tag{LV.21}$$

dove:

$$\boldsymbol{q} \equiv (q_1, q_2, \cdots, q_N), \qquad \boldsymbol{Q} \equiv (Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$$

sono i vettori, nello spazio delle configurazioni, le cui componenti sono, rispettivamente, i parametri lagrangiani del sistema e le componenti lagrangiane, in questo caso, delle forze attive.

Allora la condizione di equilibrio (LV.2) fornita dal principio dei lavori virtuali, per un sistema olonomo si traduce nella condizione:

$$\boldsymbol{Q} \times \delta \boldsymbol{q} \leq 0, \qquad \forall\, \delta \boldsymbol{q} \tag{LV.22}$$

Ora possono presentarsi due situazioni: la prima è quella più semplice e si realizza quando si hanno solamente *vincoli bilaterali;* mentre il secondo caso si ha quando sono presenti *vincoli unilaterali.* Li esaminiamo entrambi.

vincoli bilaterali

In presenza di vincoli solamente bilaterali non vi sono configurazioni di confine per il sistema, ma tutte le configurazioni sono ordinarie e tutti gli spostamenti sono *reversibili,* in quanto lo spazio delle configurazioni coincide con tutto R^N. Di conseguenza la condizione di equilibrio (LV.22) si riconduce in termini di uguaglianza:

$$\boldsymbol{Q} \times \delta\boldsymbol{q} = 0, \qquad \forall\, \delta\boldsymbol{q} \tag{LV.23}$$

Data l'arbitrarietà dello spostamento $\delta\boldsymbol{q}$ e tenendo conto del fatto che le $\boldsymbol{Q}$ non dipendono dagli spostamenti, ma solo da $\boldsymbol{q}$ ed eventualmente dal tempo, segue che il prodotto scalare nella (LV.23) si può annullare se e solo se:

$$\boxed{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t) = 0} \tag{LV.24}$$

Ovvero, in rappresentazione indiciale:

$$Q_h(q_k, t) = 0$$

Ricordiamo che, nel caso in cui il sistema delle forze agenti sia *conservativo* le componenti lagrangiane delle forze sono le derivate parziali del potenziale, per cui le condizioni di equilibrio nelle configurazioni ordinarie diventano:

$$\frac{\partial U}{\partial q_h}(q_k, t) = 0$$

• Dunque le configurazioni ordinarie di equilibrio di un sistema olonomo a vincoli lisci, soggetto all'azione di un sistema di forze conservativo, sono gli estremanti del potenziale.

La condizione (LV.24) scritta per esteso rappresenta un sistema algebrico di N equazioni per le N incognite $q_1, q_2, \cdots, q_N$:

$$\begin{cases} Q_1(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = 0 \\ Q_2(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = 0 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \\ Q_N(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = 0 \end{cases} \tag{LV.25}$$

le cui soluzioni sono le *configurazioni di equilibrio,* che denoteremo con:

$$C_r^* \equiv (q_1^*, q_2^*, \cdots, q_N^*), \qquad r = 1, 2, \cdots$$

essendo r un indice che le tabula.

vincoli unilaterali

Esaminiamo ora il caso in cui siano presenti anche dei vincoli unilaterali e quindi delle configurazioni di confine. In questo caso non tutti gli spostamenti sono reversibili e bisogna analizzare separatamente le conseguenze della (LV.22) in presenza di spostamenti *reversibili* e di spostamenti *irreversibili.*

Lo spazio delle configurazioni risulterà essere allora un sottoinsieme $\mathcal{A}$ di R^N, ad N dimensioni in quanto gli N parametri lagrangiani sono variabili indipendenti, dotato di una frontiera che possiamo caratterizzare con un'equazione cartesiana:

$$f(\boldsymbol{q}) = 0 \tag{LV.26}$$

essendo una ipersuperficie $N-1$ dimensionale. Le configurazioni ordinarie sono rappresentate dai punti di $\mathcal{A}$ che non appartengono alla frontiera (punti interni). Le configurazioni di confine sono costituite dai punti della frontiera di $\mathcal{A}$ e che quindi soddisfano l'equazione (LV.26).

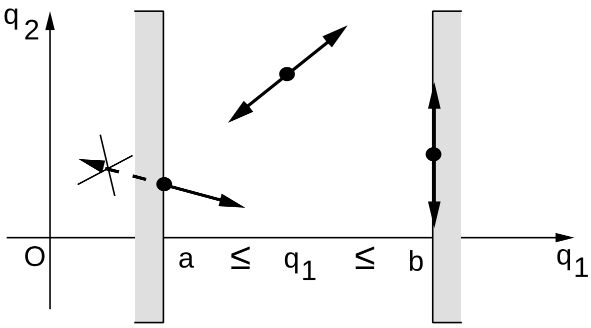

Figura LV. 3: posizioni ordinarie e di confine nello spazio delle configurazioni

i) limitazioni per un solo parametro

La situazione che si presenta con maggiore frequenza è quella in cui lo spazio delle configurazioni sia definito mediante delle limitazioni sui singoli parametri. Cominciamo con il caso in cui un solo parametro, che identifichiamo con q_1, sia soggetto a delle limitazioni del tipo:

$$a \leq q_1 \leq b$$

Può anche accadere che manchi la limitazione inferiore o quella superiore (se mancano entrambe il parametro non è evidentemente soggetto ad alcuna limitazione).

Lo spazio delle configurazioni è dato dal prodotto cartesiano:

$$\mathcal{A} = [a, b] \times R^{N-1}$$

— *configurazioni di equilibrio ordinarie*

Le configurazioni ordinarie sono caratterizzate, allora dalle limitazioni:

$$a < q_1 < b \tag{LV.27}$$

Gli spostamenti che si possono effettuare a partire da una configurazione ordinaria sono tutti reversibili, per cui il problema si riconduce esattamente al caso, già esaminato, in cui tutti i vincoli sono bilaterali. Quindi le configurazioni di equilibrio ordinarie si ottengono mediante il sistema (LV.25).

• Si deve fare attenzione, però, che in questo caso non tutte le soluzioni del sistema (LV.25) sono configurazioni ordinarie di equilibrio, ma solamente quelle soluzioni che soddisfano le limitazioni (LV.27).

— *configurazioni di confine*

Quando un solo parametro è soggetto a limitazioni le configurazioni di confine si possono verificare in due modi:

a) $q_1 = a \implies \delta q_1 \geq 0$

Notiamo che essendo a l'estremo inferiore dell'intervallo in cui può variare q_1, il vincolo olonomo comporta, oltre alla limitazione per le configurazioni, anche la limitazione per gli spostamenti: $\delta q_1 \geq 0$. Ne consegue che sono reversibili solo gli spostamenti del tipo:

$$\delta \boldsymbol{q} \equiv (0, \delta q_2, \cdots, \delta q_N)$$

essendo la prima componente nulla e le rimanenti arbitrarie e sono irreversibili tutti gli spostamenti la cui prima componente è maggiore di zero.

La condizione sul lavoro fornita dal principio dei lavori virtuali, per la classe degli *spostamenti reversibili,* allora, si scrive come uguaglianza e inoltre manca del termine relativo ad $h = 1$:

$$Q_2\,\delta q_2 + Q_3\,\delta q_3 + \cdots + Q_N\,\delta q_N = 0, \qquad \forall\,\delta q_2, \delta q_3, \cdots, \delta q_N$$

Da cui, data l'arbitrarietà dei $\delta q_h, h = 2, 3, \cdots, N$ e l'indipendenza delle Q_h dagli spostamenti, si ha che devono annullarsi i coefficienti dell'identità, cioè:

$$Q_h = 0, \qquad h = 2, 3, \cdots, N$$

Queste condizioni costituiscono un sistema di $N - 1$ equazioni per le $N-1$ incognite: $q_2, q_3, \cdots, q_N$, mentre il valore della prima incognita è fissato essendo $q_1 = a$. Si ha allora il sistema:

$$\begin{cases} Q_2(a, q_2, \cdots, q_N, t) = 0 \\ Q_3(a, q_2, \cdots, q_N, t) = 0 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \\ Q_N(a, q_2, \cdots, q_N, t) = 0 \end{cases} \tag{LV.28}$$

Da questo sistema si possono determinare le soluzioni per le $N - 1$ incognite; tuttavia non si può ancora concludere che le N-ple:

$$(a, q_2^*, q_3^*, \cdots, q_N^*)$$

siano configurazioni di equilibrio, in quanto, ai fini dell'equilibrio, la condizione (LV.22) deve essere verificata per tutti gli spostamenti virtuali, mentre finora abbiamo esaminato solamente la classe degli spostamenti reversibili. Per esaminare anche che cosa accade quando gli spostamenti sono irreversibili, introduciamo le condizioni (LV.28) — che all'equilibrio devono continuare a valere indipendentemente dagli spostamenti che si effettuano, dal momento che le Q_h non dipendono dallo spostamento — nella (LV.22), ottenendo:

$$Q_1 \delta q_1 \leq 0, \qquad \forall\, \delta q_1$$

Ma $\delta q_1 \geq 0$ in conseguenza del vincolo unilaterale e quindi la condizione precedente può essere soddisfatta se e solo se:

$$Q_1 \leq 0 \tag{LV.29}$$

A questo punto abbiamo esaminato il lavoro in corrispondenza di tutti gli spostamenti virtuali e abbiamo determinato tutte le condizioni di equilibrio per le configurazioni di confine corrispondenti a $q_1 = a$. Le condizioni sono dunque date da:

$$\boxed{\begin{cases} Q_1(a, q_2, \cdots, q_N, t) \leq 0 \\ Q_h(a, q_2, \cdots, q_N, t) = 0, \;\; h = 2, 3, \cdots, N \end{cases}} \tag{LV.30}$$

Operativamente per risolvere questo sistema di condizioni si procede nel modo seguente:

— per prima cosa si risolve il sistema delle equazioni (LV.28) ottenendo delle soluzioni:

$$(a, q_2^*, q_3^*, \cdots, q_N^*)$$

— successivamente si introducono, una ad una le soluzioni trovate nella Q_1, cioè si valuta:

$$Q_1(a, q_2^*, \cdots, q_N^*, t)$$

Se questa quantità risulta essere non positiva, allora si conclude che nella configurazione di confine esaminata c'è equilibrio, in caso contrario non c'è equilibrio.

a) $q_1 = b \implies \delta q_1 \leq 0$

In maniera del tutto analoga si procede quando q_1 assume il valore estremo superiore dell'intervallo, con l'unica differenza che questa volta il vincolo comporta, per gli spostamenti, $\delta q_1 \leq 0$ e quindi la disuguaglianza cambia ovunque senso. Si ottengono in questo modo le condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} Q_1(a, q_2, \cdots, q_N, t) \geq 0 \\ \\ Q_h(a, q_2, \cdots, q_N, t) = 0, \ h = 2, 3, \cdots, N \end{cases} \tag{LV.31}$$

che si risolvono allo stesso modo del caso precedente.

ii) limitazioni per due o più parametri

In questo caso, che si può verificare solo se $N \geq 2$, cioè se il sistema ha almeno due gradi di libertà, si hanno due condizioni per i due parametri soggetti a limitazioni, che supponiamo siano i primi due:

$$a_1 \leq q_1 \leq b_1, \qquad a_2 \leq q_2 \leq b_2$$

Lo spazio delle configurazioni è dato adesso dal prodotto cartesiano:

$$\mathcal{A} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times R^{N-2}$$

— *configurazioni di equilibrio ordinarie*

Le configurazioni di equilibrio ordinarie sono caratterizzate, allora dalle limitazioni:

$$a_1 < q_1 < b_1, \qquad a_2 < q_2 < b_2 \tag{LV.32}$$

Gli spostamenti che si possono effettuare a partire da una configurazione ordinaria sono tutti reversibili, per cui il problema si riconduce come prima al caso, già esaminato, in cui tutti i vincoli sono bilaterali. Le configurazioni di equilibrio ordinarie si ottengono mediante il sistema (LV.25).

• Si deve fare attenzione che sono configurazioni ordinarie di equilibrio solamente quelle soluzioni che soddisfano le limitazioni (LV.32).

— *configurazioni di confine*

Quando vi sono due parametri soggetti a limitazioni le configurazioni di confine si possono verificare nei seguenti modi:

a) $q_1 = a_1, \qquad a_2 < q_2 < b_2$

b) $q_1 = b_1, \qquad a_2 < q_2 < b_2$

c) $a_1 < q_1 < b_1, \qquad q_2 = a_2$

d) $a_1 < q_1 < b_1, \qquad q_2 = b_2$

e) $q_1 = a_1, \qquad q_2 = a_2$

f) $q_1 = a_1, \qquad q_2 = b_2$

g) $q_1 = b_1, \qquad q_2 = a_2$

h) $q_1 = b_1, \qquad q_2 = b_2$

Seguendo il metodo utilizzato per il caso in cui un solo parametro è soggetto a limitazioni si giunge nei casi a), b), c), d) a risultati identici a quelli ottenuti quando un solo parametro è soggetto a limitazioni. Per esempio nel caso a) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} Q_1(a_1, q_2, \cdots, q_N, t) \leq 0 \\ \\ Q_h(a_1, q_2, \cdots, q_N, t) = 0, \ h = 2, 3, \cdots, N \end{cases} \tag{LV.33}$$

• Bisogna fare attenzione che le soluzioni di questo sistema sono accettabili solamente se verificano anche la limitazione $a_2 < q_2 < b_2$ imposta al parametro q_2 nel caso a).

Analogamente si procede nei casi b), c), d).

Il caso e) in cui entrambi i parametri assumono un valore estremo comporta la comparsa di due disequazioni e di $N-2$ equazioni per le $N-2$ incognite $q_3, \cdots, q_N$, essendo i primi due parametri fissati nei valori rispettivi a_1 e a_2. Il sistema delle condizioni di equilibrio diviene allora:

$$\begin{cases} Q_1(a_1, a_2, q_3, \cdots, q_N, t) \leq 0 \\ \\ Q_2(a_1, a_2, q_3, \cdots, q_N, t) \leq 0 \\ \\ Q_3(a_1, a_2, q_3, \cdots, q_N, t) = 0 \\ \\ \quad \ldots \qquad \ldots \\ \\ Q_N(a_1, a_2, q_3, \cdots, q_N, t) = 0 \end{cases} \tag{LV.34}$$

Analogamente si trattano i restanti casi, facendo attenzione a imporre correttamente i segni delle disuguaglianze.

Quando le limitazioni coinvolgono più di due parametri il modo di procedere è lo stesso e si moltiplica il numero di casi da esaminare.

Osserviamo che quando il numero di parametri soggetti a limitazioni è uguale a N, allora, nei casi in cui tutti i parametri assumono un valore estremo, il sistema delle condizioni di equilibrio contiene solo delle disuguaglianze. Per esempio, per $N = 2$ nel caso e) sopra esaminato, si avrebbero le condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} Q_1(a_1, a_2, t) \leq 0 \\ \\ Q_2(a_1, a_2, t) \leq 0 \end{cases} \tag{LV.35}$$

I valori dei parametri lagrangiani sono già noti, in quanto sono dati da $q_1 = a_1, q_2 = a_2$ e rimane solo da sostituirli nelle due condizioni per controllare se sono soddisfatte.

iii) spazio delle configurazioni a frontiera regolare

Lo spazio delle configurazioni, in generale, può non essere una striscia o un intervallo rettangolare, ma essere un dominio con una frontiera qualunque. Accenniamo a come si può trattare questo caso limitandoci, per semplicità, ad un sistema a due gradi di libertà in cui lo spazio delle configurazioni è un dominio $\mathcal{A} \subset R^2$, semplicemente connesso:

$$\mathcal{A} = \{(q_1, q_2) \in R^2 \ , \ f(q_1, q_2) \leq 0\}$$

la cui frontiera, di equazione cartesiana:

$$f(q_1, q_2) = 0$$

supponiamo essere una curva regolare, in modo che in ogni punto sia possibile considerare la tangente e la normale.

Di conseguenza le limitazioni per i parametri lagrangiani si esprimono mediante la condizione:

$$f(q_1, q_2) \leq 0 \tag{LV.36}$$

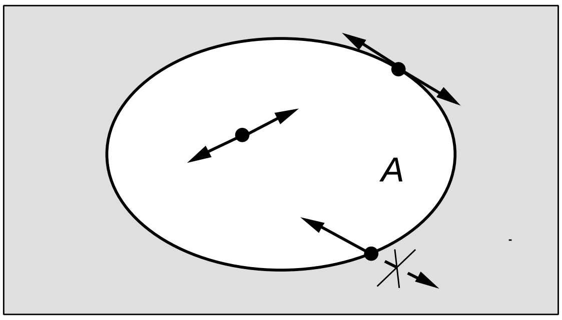

Figura LV. 4: spazio delle configurazioni semplicemente connesso

— *configurazioni ordinarie*

Le configurazioni ordinarie di equilibrio si ricercano con il solito metodo e le soluzioni q_1^*, q_2^* del sistema:

$$\begin{cases} Q_1(q_1, q_2, t) = 0 \\ \\ Q_2(q_1, q_2, t) = 0 \end{cases} \tag{LV.37}$$

rappresentano delle configurazioni di equilibrio ordinarie solo se soddisfano la condizione:

$$f(q_1^*, q_2^*) < 0$$

— *configurazioni di confine*

Sono configurazioni che si trovano sulla frontiera. Per determinarle denotiamo con $\boldsymbol{n}$ il versore dello spazio delle configurazioni normale alla frontiera, orientato verso l'interno di $\mathcal{A}$ e con $\boldsymbol{u}$ il versore tangente alla frontiera, in un suo punto generico. Osserviamo che gli spostamenti tangenti alla frontiera sono reversibili, mentre gli spostamenti che hanno una componente non nulla in direzione della normale sono irreversibili.

Introducendo la decomposizione della forza generalizzata lungo la tangente e la normale alla frontiera:

$$\boldsymbol{Q} = Q_u\,\boldsymbol{u} + Q_n\,\boldsymbol{n}, \qquad Q_u = \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{u}, \qquad Q_n = \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n}$$

possiamo scrivere la condizione di equilibrio (LV.22) nella forma:

$$Q_u\boldsymbol{u} \times \delta\boldsymbol{q} + Q_n\boldsymbol{n} \times \delta\boldsymbol{q} \leq 0, \qquad \forall\,\delta\boldsymbol{q} \tag{LV.38}$$

Quando gli spostamenti sono tangenti alla frontiera (reversibili) essa si specializza nella condizione:

$$Q_u\boldsymbol{u} \times \delta\boldsymbol{q} = 0, \qquad \forall\,\delta\boldsymbol{q}$$

da cui si ricava:

$$Q_u = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q_1 u_1 + Q_2 u_2 = 0 \tag{LV.39}$$

Se gli spostamenti sono irreversibili si ha, tenendo conto della (LV.39):

$$Q_n\boldsymbol{n} \times \delta\boldsymbol{q} \leq 0, \qquad \forall\,\delta\boldsymbol{q}$$

Tenendo conto che lo spostamento irreversibile può avere la componente normale solo diretta verso l'interno di $\mathcal{A}$, cioè: $\boldsymbol{n} \times \delta\boldsymbol{q} \geq 0$, segue la condizione:

$$Q_n \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q_1 n_1 + Q_2 n_2 \leq 0 \tag{LV.40}$$

essendo u_1, u_2 le componenti di $\boldsymbol{u}$ e n_1, n_2 le componenti di $\boldsymbol{n}$ nello spazio delle configurazioni.

Complessivamente le condizioni di equilibrio per le configurazioni di confine si scrivono:

$$\begin{cases} Q_1(q_1, q_2, t)\, n_1(q_1, q_2) + Q_2(q_1, q_2, t)\, n_2(q_1, q_2) \leq 0 \\ \\ Q_1(q_1, q_2, t)\, u_1(q_1, q_2) + Q_2(q_1, q_2, t)\, u_2(q_1, q_2) = 0 \end{cases} \tag{LV.41}$$

Se lo spazio delle configurazioni non è semplicemente connesso, possono essere presenti più rami distinti della frontiera, caratterizzabili mediante equazioni del tipo:

$$f_r(q_1, q_2) = 0, \qquad r = 1, 2, \cdots$$

In questa situazione le configurazioni di confine si possono realizzare alternativamente su ciascuno di questi rami e si procede per ogni ramo con il metodo appena illustrato.

Come osservazione conclusiva, valida qualunque sia lo spazio delle configurazioni considerato, notiamo che possono esistere delle configurazioni di confine nelle quali le forze lagrangiane sono tutte nulle, come accade nel caso delle configurazioni ordinarie. Questo accade perchè, tali configurazioni, se non fosse presente un vincolo unilaterale sarebbero ugualmente configurazioni di equilibrio e in quel caso sarebbero ordinarie. Se invece le condizioni di equilibrio contengono almeno una disequazione, soddisfatta come disuguaglianza stretta, ciò significa che la configurazione di confine in questione è di equilibrio proprio grazie alla presenza del vincolo unilaterale e non vi sarebbe equilibrio in assenza di esso.

Sistemi a legami completi

Vale la pena rilevare che vi sono sistemi olonomi, a vincoli lisci, per i quali l'equilibrio risulta sussistere per qualunque valore di uno o più parametri lagrangiani, a condizione che sia soddisfatta una opportuna condizione tra le costanti di struttura (masse, costanti elastiche, ecc.); in questi casi esistono infinite configurazioni di equilibrio del sistema, anche se non vi è attrito. In particolare se un tale sistema ha un solo grado di libertà tutte le configurazioni consentite dai vincoli risultano essere di equilibrio; si parla allora di sistema a legami completi. Tipici esempi sono costituiti dalla leva e dal torchio a vite.

Leva

La leva è una sbarra rigida con un punto fisso O (fulcro della leva), libera di ruotare in un piano, ai cui estremi A e B sono applicate due forze parallele e concordi, costanti, le cui rette d'azione appartengono al piano della leva.

La condizione di equilibrio per un tale sistema, a un grado di libertà e a vincoli lisci, si ottiene mediante il principio dei lavori virtuali, tenendo conto che tutti gli spostamenti sono reversibili. Il lavoro delle due forze esterne attive è dato da:

$$\delta L^{(e,a)} = \boldsymbol{M}_O^{(e,a)} \times \delta\boldsymbol{\psi}$$

essendo:

$$\boldsymbol{M}_0^{(e,a)} = OA \wedge \boldsymbol{F}_A + OB \wedge \boldsymbol{F}_B$$

Denotando:

$$OA = a\,\boldsymbol{u},\ OB = -b\,\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{F}_A = F_A\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{F}_B = F_B\boldsymbol{w}, \qquad \delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{c}_3\delta\vartheta$$

otteniamo all'equilibrio:

$$\delta L^{(e,a)} = (F_A a - F_B b)\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{c}_3\, \delta\vartheta = 0, \qquad \forall \delta\vartheta$$

Escludendo il caso insignificante in cui le forze siano parallele alla leva, il prodotto misto è sempre diverso da zero e si ottiene la condizione di equilibrio:

$$F_A a = F_B b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{F_A}{F_B} = \frac{b}{a}$$

nota come *regola d'oro della leva.* Notiamo come, se questa condizione si verifica, l'equilibrio sussiste per qualunque valore del parametro lagrangiano ϑ. Com'è noto questa semplice regola consente di equilibrare in uno dei due estremi della leva una forza di intensità anche molto superiore a quella che viene applicata all'altro estremo, giocando su un rapporto favorevole tra i due bracci a e b.

Torchio

In maniera analoga funziona il torchio a vite, costituito da una vite che ruota nella corrispondente madrevite. La vite avanza di una lunghezza h (passo della vite) ogni giro completo della vite stessa, lungo l'asse verticale z. Il sistema possiede il solo grado di libertà ϑ che definisce l'angolo di rotazione della vite. Le forze vengono applicate come in fig. (**??**): $\boldsymbol{F}_A$ viene disposta con la retta d'azione normale al braccio e $\boldsymbol{F}_B$ si oppone all'avanzamento della vite. La condizione di equilibrio si ottiene, anche in questo caso, mediante il principio dei lavori virtuali, tenendo conto che tutti gli spostamenti sono reversibili.

Il lavoro è dato da:

$$\delta L^{(e,a)} = \boldsymbol{F}_B \times \delta\Omega + \Omega A \wedge \boldsymbol{F}_A \times \delta\boldsymbol{\psi}$$

Denotando:

$$\Omega A = a\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{F}_A = F_A \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{F}_B = -F_B \boldsymbol{c}_3, \qquad \delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{c}_3\, \delta\vartheta$$

e tenendo conto che risulta:

$$\delta B = \boldsymbol{c}_3\, \frac{h}{2\pi}\, \delta\vartheta$$

si ottiene all'equilibrio:

$$\left(F_A a - F_B\, \frac{h}{2\pi} \right) \delta\vartheta = 0, \qquad \forall \delta\vartheta$$

Da cui la regola d'oro del torchio:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{h}{2\pi a}$$

che consente di realizzare una forza F_B molto più intensa della F_A accordando opportunamente il braccio a e il passo della vite.

Equilibrio relativo e potenziale della forza centrifuga

Tutta la trattazione svolta in questo capitolo è stata fatta assumendo che l'osservatore rispetto al quale si riferisce l'equilibrio di un sistema di punti materiali sia inerziale. Tuttavia l'estensione all'equilibrio riferito ad un sistema non inerziale (equilibrio relativo) è immediata se si fa riferimento alla definizione di equilibrio di un sistema data all'inizio del capitolo. Se un sistema, come si è detto, è in equilibrio se e solo se ogni suo punto è in equilibrio, ne consegue che l'equilibrio relativo di un sistema di punti materiali equivale all'equilibrio relativo di ogni punto del sistema. Ora la condizione di equilibrio relativo di ogni punto si ottiene aggiungendo le forze di trascinamento nelle usuali condizioni di equilibrio. Per un sistema di punti si avrà allora:

$$\boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_s^{(\tau)} + \boldsymbol{\Phi}_s = 0$$

Di conseguenza nella formulazione del principio dei lavori virtuali basta aggiungere alle forze attive la forza di trascinamento agente su ogni singolo punto.

In particolare quando l'osservatore relativo ruota uniformemente attorno a una retta fissa rispetto al sistema assoluto, le forze centrifughe applicate ad ogni punto risultano essere conservative e il loro potenziale è la somma dei potenziali di ciascuna di esse. Questa è una conseguenza diretta di quanto abbiamo visto nella statica relativa del punto. Ma per un punto abbiamo visto che il potenziale della forza centrifuga è uguale all'energia cinetica associata con il moto di trascinamento del punto. Poichè questo risultato continua a valere per i singoli punti di un sistema, avremo, di conseguenza per l'intero sistema:

$$U_{centrif.} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{\omega}^2 r_s^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2 \sum_{s=1}^{N} m_s r_s^2 = \frac{1}{2}\mathcal{J}\boldsymbol{\omega}^2$$

dove $\mathcal{J}$ risulta essere il momento d'inerzia del sistema materiale rispetto all'asse di rotazione del riferimento relativo.

Dunque il risultato:

$$U_{centrif.} = T^{(\tau)}$$

si estende dal caso del punto a quello di un sistema qualunque di punti materiali.

Reazioni vincolari

Il principio dei lavori virtuali tiene in considerazione le sole forze attive, perciò, di per sè, consente di determinare le configurazioni di equilibrio ma non le reazioni vincolari di un sistema meccanico a vincoli lisci. Tuttavia è possibile, anche se in maniera spesso piuttosto laboriosa, determinare anche le reazioni vincolari applicate ai punti di un sistema.

Per fare questo si utilizza il cosiddetto *metodo dello svincolamento* che consiste nel considerare un sistema equivalente a quello dato, svincolato nel punto in cui si vuole conoscere la reazione vincolare. Nel sistema svincolato, che ha un numero maggiore di gradi di libertà del sistema originario, viene applicata una forza attiva che uguaglia la reazione vincolare e che quindi realizza le stesse configurazioni di equilibrio. Note allora le configurazioni di equilibrio del sistema originario è possibile determinare le corrispondenti reazioni vincolari nel punto considerato, uguali alle forze attive ad esse sostituite e che rappresentano le incognite del problema. Per conoscere tutte le reazioni vincolari, corrispondenti a tutti i vincoli presenti nel sistema, occorre procedere allo svincolamento successivo di tutti i punti vincolati.

Generalmente, quando occorre la conoscenza delle reazioni vincolari, è preferibile il metodo delle equazioni cardinali della statica che esamineremo nel prossimo capitolo, in quanto risulta più diretto e più rapido.

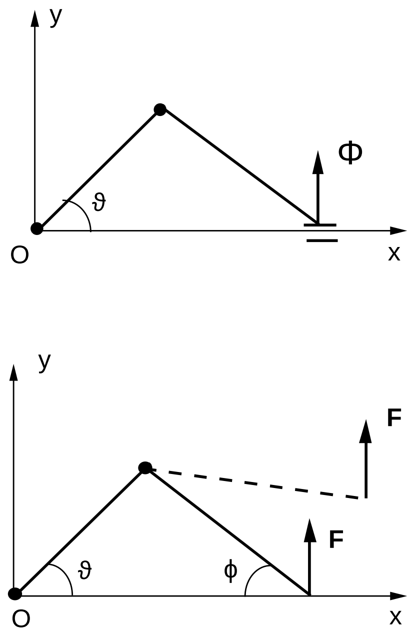

Figura LV. 5: metodo dello svincolamento