STATICA

SP. Statica del punto

Per affrontare la statica del punto dobbiamo, anzitutto, introdurre i concetti di *quiete* e di *equilibrio,* a cui ci si è finora riferiti talvolta in modo intuitivo, dandone ora una definizione in termini matematici.

quiete

Diciamo che un punto materiale P di massa m, al quale è applicata una forza $\boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t)$ è in *quiete* nella posizione P_0, rispetto ad un osservatore inerziale $Oxyz$, se si verificano le seguenti condizioni:

i) $OP(0) = OP_0, \qquad \boldsymbol{v}(0) = 0$

ovvero il punto si trova all'istante iniziale in P_0 con velocità iniziale nulla;

ii) $\boldsymbol{a}(t) = 0, \qquad \forall t \geq 0$

ovvero il sistema delle equazioni del moto $m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$ ammette la *soluzione statica,* cioè la soluzione per cui le derivate temporali sono tutte nulle.

Integrando le equazioni del moto segue subito che:

$$\boldsymbol{v}(t) = 0, \qquad\qquad OP(t) = OP_0 \qquad \forall t \geq 0$$

Dunque il punto rimane indefinitamente fermo nella posizione in cui si trovava all'istante iniziale.

equilibrio

Diciamo che un punto P di massa m, al quale è applicata una forza $\boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t)$ è in *equilibrio* nella posizione P_0, rispetto ad un osservatore inerziale $Oxyz$, se è soddisfatta la condizione sulla forza:

$$\boldsymbol{f}(P_0, 0, t) = 0, \qquad \forall t \geq 0 \tag{SP.1}$$

cioè se la forza applicata al punto e calcolata per $P = P_0, \boldsymbol{v} = 0$, si mantiene nulla in ogni istante, a partire da quello iniziale.

• Supposta la *quiete* segue sempre l'*equilibrio.* Infatti se nell'equazione fondamentale della dinamica:

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t)$$

si impongono le condizioni i) e ii) si ottiene come conseguenza:

$$\boldsymbol{f}(P_0, 0, t) = 0$$

cioè la definizione di equilibrio.

Viceversa: dato l'*equilibrio* la *quiete* segue solo se è soddisfatto il teorema di unicità della soluzione, cioè se la $\boldsymbol{f}$ è lipschitziana. In questo caso, infatti dalla definizione di equilibrio, introdotta nell'equazione fondamentale della dinamica, segue che il problema del moto si riconduce al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{P} = 0 \\ \\ OP(0) = OP_0, \qquad \boldsymbol{v}(0) = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione: $OP(t) = OP_0$.

Poichè le forze di natura fisica sono lipschitziane, la ricerca delle posizioni di equilibrio equivale all'individuazione delle posizioni in cui un dato sistema si mantiene in quiete.

• Dal punto vista matematico il problema della ricerca delle posizioni di equilibrio si presenta come un problema *algebrico* che consiste nella ricerca degli zeri della funzione forza.

Affinchè un punto possa stare in equilibrio sotto l'azione di una forza attiva non nulla dovrà essere soggetto a vincoli; perciò la definizione di equilibrio (SP.1) si scrive convenientemente, per un punto materiale vincolato, separando la forza attiva $\boldsymbol{F}$ dalla reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}$, essendo $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}$:

$$\boxed{\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi} = 0} \tag{SP.2}$$

In questa equazione è generalmente conosciuta, dalla fisica del problema, solo la forza attiva $\boldsymbol{F}$, mentre sono incognite, oltre alle coordinate del punto P, le cui soluzioni rappresentano le posizioni di equilibrio del punto, anche le componenti della reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}$.

Proiettando la (SP.2) su un sistema di assi cartesiani si ottengono al massimo tre equazioni, mentre le incognite possono essere più di tre. Altre condizioni si possono avere dalla legge dell'attrito statico, o da ipotesi sulla natura dei vincoli. In ogni caso il problema risulta essere determinato solo quando il numero delle equazioni indipendenti uguaglia il numero delle incognite. Si dice allora che il problema è *staticamente determinato.* In caso contrario si dice che il problema risulta essere *staticamente indeterminato.*

• Osserviamo che le forze, in statica, possono essere funzioni solo di P e di t, ma non della velocità del punto, essendo supposto in ogni istante: $\boldsymbol{v} = 0$.

Per procedere alla risoluzione di un problema di equilibrio ci si riconduce a tante equazioni indipendenti quanti sono i gradi di libertà, che non contengano le reazioni vincolari (equazioni pure dell'equilibrio). Le soluzioni di queste equazioni pure dell'equilibrio, che risultino essere compatibili con i vincoli, sono le posizioni di equilibrio che il punto può assumere. Denotata con P^* una qualunque posizione di equilibrio si determina poi la corrispondente reazione vincolare all'equilibrio, mediante la (SP.2):

$$\boldsymbol{\Phi}^* = -\boldsymbol{F}(P^*, t)$$

dove abbiamo eliminato lo zero al posto della velocità nell'espressione della forza.

Punto vincolato su una superficie priva di attrito

Consideriamo un punto materiale P vincolato ad appartenere ad una superficie priva di attrito, di equazione cartesiana:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{SP.3}$$

riferita alla terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ che caratterizza un osservatore inerziale. Al punto P è applicata la forza attiva $\boldsymbol{F}$ che, nel caso più generale può dipendere da P e da t, ma non dalla velocità che in statica si suppone nulla, in quanto come abbiamo visto, l'equilibrio è definito imponendo che sia nulla la velocità nell'espressione della forza.

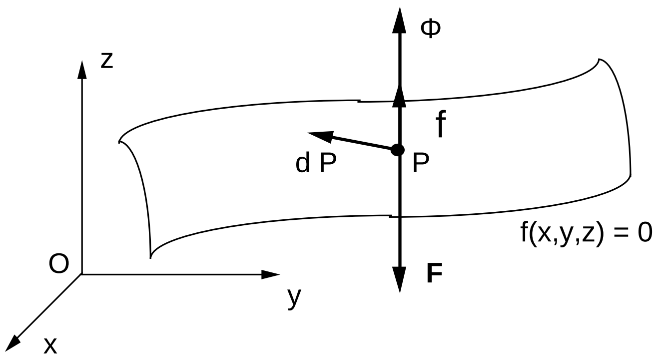

Figura SP. 1: equilibrio di un punto vincolato su una superficie priva di attrito

Dal momento che la superficie è priva di attrito, per la definizione di attrito su una superficie, la componente della reazione vincolare sul piano tangente alla superficie del vincolo risulta essere nulla e quindi la reazione vincolare è normale alla superficie stessa nel punto P. Possiamo tradurre in termini analitici questa informazione imponendo al vettore $\boldsymbol{\Phi}$ di essere parallelo al gradiente della funzione f che caratterizza la superficie, o al più nullo. Infatti, com'è noto dalla geometria, ∇f è, punto per punto, normale alla superficie.

E' immediato verificarlo supposto che la superficie sia regolare e, quindi f sicuramente differenziabile: infatti agendo sulla (SP.3) con l'operatore differenziale δ (o se si vuole anche con ∂ dal momento che il vincolo è indipendente dal tempo e l'effetto dei due operatori è identico) si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z = 0$$

ovvero:

$$\nabla f \times \delta P = 0$$

e quindi, essendo gli spostamenti permessi dal vincolo solo quelli sul piano tangente alla superficie in P, segue che ∇f risulta normale alla superficie stessa.

Tornando al problema dell'equilibrio: l'informazione che la superficie del vincolo è priva di attrito si traduce in equazione come:

$$\boldsymbol{\Phi} = \lambda \nabla f \tag{SP.4}$$

dove λ è un'incognita che determina il modulo e il verso della reazione vincolare. Sostituendo la (SP.4) nella condizione di equilibrio del punto vincolato (SP.2) la veniamo a specializzare per il nostro problema, ottenendo:

$$\boldsymbol{F} + \lambda \nabla f = 0 \tag{SP.5}$$

La condizione vettoriale (SP.5) proiettata sugli assi cartesiani fornisce un *sistema algebrico* di tre equazioni per le tre incognite x, y, z che sono le coordinate del punto P. Ma abbiamo in più una quarta incognita λ relativa alla reazione vincolare. Occorre dunque una quarta equazione per determinare il problema, e questa è data dall'equazione della superficie (SP.3), che rappresenta un vincolo olonomo per le coordinate (e per gli spostamenti) del punto P. In conclusione il sistema algebrico che risolve il problema è dato dalle quattro equazioni:

$$F_x(x, y, z, t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$$

$$F_y(x, y, z, t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

$$F_z(x, y, z, t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z) = 0$$

per le quattro incognite x, y, z, λ. Il problema è staticamente determinato e le soluzioni, se ne esistono, rappresentano le posizioni di equilibrio del punto e determinano le corrispondenti reazioni vincolari. Denoteremo le posizioni di equilibrio con un asterisco, per distinguerle dalle posizioni non di equilibrio e potremo tabularle con un indice che le ordina. Ad esempio:

$$P_1^* \equiv (x_1^*, y_1^*, z_1^*), \qquad P_2^* \equiv (x_2^*, y_2^*, z_2^*), \cdots$$

e così pure le reazioni vincolari corrispondenti:

$$\boldsymbol{\Phi}_1^*, \qquad \boldsymbol{\Phi}_2^*, \cdots$$

Notiamo che per determinare la $\boldsymbol{\Phi}$ dopo aver trovato le posizioni di equilibrio, anzichè utilizzare la (SP.4), si può ricorrere direttamente alla condizione di equilibrio (SP.2), sostituendovi le coordinate delle posizioni di equilibrio ottenute:

$$\boldsymbol{\Phi}_s^* = -\boldsymbol{F}(x_s^*, y_s^*, z_s^*)$$

essendo s l'indice che le tabula.

Come caso particolare di interesse esaminiamo il caso in cui la forza attiva sia conservativa. Allora esiste il potenziale della forza, che è funzione delle sole variabili x, y, z ed è tale che

$$\boldsymbol{F} = \nabla U$$

Dunque la condizione (SP.5) si specializza in:

$$\nabla U + \lambda \nabla f = 0 \tag{SP.6}$$

E il sistema delle condizioni di equilibrio si scrive per esteso:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z) = 0$$

E' interessante osservare che, dal punto di vista analitico, queste rappresentano le condizioni perchè un punto sia estremante della funzione

$U(x, y, z)$, con le variabili vincolate sulla superficie di equazione (SP.3), che si ottengono con il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* e λ è il *moltiplicatore di Lagrange* relativo al vincolo.

Punto vincolato su una curva priva di attrito

La metodologia dei moltiplicatori di Lagrange, appena sviluppata, ci consente di determinare anche le poszioni di equilibrio di un punto vincolato ad appartenere ad una curva priva di attrito, di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{SP.7}$$

rispetto al sistema cartesiano $Oxyz$ che caratterizza un osservatore inerziale.

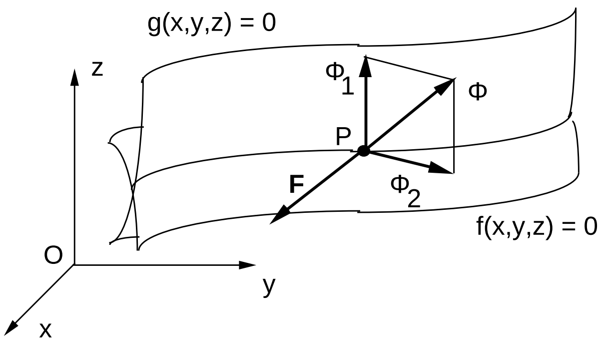

Figura SP. 2: equilibrio di un punto vincolato su una curva priva di attrito

Infatti una curva priva di attrito si può pensare come l'intersezione di due superfici prive di attrito, di equazioni rispettive: $f(x, y, z) = 0$ e

$g(x,y,z) = 0$. Di conseguenza la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}$ che mantiene il punto sulla curva risulta realizzata dai contributi che ciascuna superficie priva di attrito è in grado di esplicare. Avremo cioè:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2$$

dove, essendo le superfici prive di attrito, ciascuna delle due reazioni componenti risulta normale alla superficie dalla quale viene esplicata, e quindi parallela al rispettivo gradiente (o al più nulla):

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \lambda \nabla f, \qquad \boldsymbol{\Phi}_2 = \mu \nabla g$$

Di conseguenza risulta:

$$\boldsymbol{\Phi} = \lambda \nabla f + \mu \nabla g \tag{SP.8}$$

La condizione vettoriale di equilibrio diviene allora:

$$\boldsymbol{F} + \lambda \nabla f + \mu \nabla g = 0 \tag{SP.9}$$

che, proiettata sugli assi, fornisce un sistema di tre equazioni nelle cinque incognite x, y, z, λ, μ. Le due equazioni mancanti sono date dalle equazioni della curva a cui le coordinate del punto devono soddisfare per rispettare il vincolo. Il sistema diviene così un sistema di cinque equazioni per cinque incognite e il problema risulta staticamente determinato:

$$F_x(x,y,z,t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \mu \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 0$$

$$F_y(x,y,z,t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \mu \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 0$$

$$F_z(x, y, z, t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \mu \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z) = 0$$

$$g(x, y, z) = 0$$

Nel caso in cui la forza attiva sia conservativa il sistema precedente si specializza nella forma:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \mu \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \mu \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \mu \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z) = 0$$
$$g(x, y, z) = 0$$

Dal punto di vista analitico queste rappresentano le condizioni per la ricerca degli estremanti vincolati del potenziale. Essendo presenti due equazioni di vincolo sono necessari due moltiplicatori di Lagrange λ, μ.

Punto vincolato su una superficie con attrito

Nel caso in cui sulla superficie del vincolo sia presente l'attrito occorre far uso della legge dell'attrito statico di Coulomb-Morin:

$$|\Phi_T| \leq f_s |\Phi_n|$$

Inoltre non conviene proiettare la:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi} = 0$$

sulla base del sistema cartesiano $Oxyz$ dell'osservatore, al quale è riferita l'equazione cartesiana (in alternativa si possono avere le equazioni parametriche):

$$f(x, y, z) = 0$$

che caratterizza la superficie del vincolo. In alternativa conviene scegliere una *base ortonormale* intrinsecamente legata alla superficie del vincolo, del tipo:

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n}\}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

con $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ versori che risultano, di conseguenza, appartenere al piano tangente alla superficie e possono essere scelti arbitrariamente su di esso, in modo da rispettare le condizioni di ortonormalità della base. Denotando con gli indici u, w, n le componenti dei vettori rispetto alla base, la reazione vincolare si rappresenta nella forma:

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi_T \boldsymbol{u} + \Phi_w \boldsymbol{w} + \Phi_n \boldsymbol{n}$$

e possiamo ora esprimere il modulo dell'attrito come:

$$|\Phi_T| = \sqrt{\Phi_u^2 + \Phi_w^2}$$

E quindi scrivere il sistema completo di tutte le condizioni per l'equilibrio del punto vincolato di cui disponiamo:

$$\begin{cases} F_u + \Phi_u = 0 \\ F_w + \Phi_w = 0 \\ F_n + \Phi_n = 0 \\ \sqrt{\Phi_u^2 + \Phi_w^2} \leq f_s |\Phi_n| \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{SP.10}$$

L'eliminazione delle reazioni vincolari, mediante sostituzione in questo sistema, conduce alle condizioni pure dell'equilibrio:

$$\begin{cases} \sqrt{F_u^2(x,y,z,t) + F_w^2(x,y,z,t)} \leq f_s |F_n(x,y,z,t)| \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{SP.11}$$

• Osserviamo che la presenza di una disequazione tra le condizioni di equilibrio, a causa dell'attrito statico, comporta che vi sia un insieme *continuo* di posizioni di equilibrio, che rappresentano, sulla superficie del vincolo, una regione in cui il punto si mantiene in equilibrio.

Determinato l'insieme delle posizioni di equilibrio del punto P, si possono determinare le corrispondenti reazioni vincolari tramite le rimanenti equazioni del sistema (SP.10).

Osserviamo che il caso particolare in cui l'attrito sia nullo si può sempre ottenere ponendo

$$f_s = 0$$

nel sistema (SP.10), che si specializza allora come:

$$\begin{cases} F_u(x,y,z,t) = 0 \\ \\ F_w(x,y,z,t) = 0 \\ \\ F_n(x,y,z,t) + \Phi_n = 0 \\ \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{SP.12}$$

In questo caso il sistema contiene solo equazioni e risulta staticamente determinato essendovi quattro equazioni, per le quattro incognite x, y, z, Φ_n. Tre di queste equazioni non contengono reazioni vincolari e determinano direttamente le posizioni di equilibrio. Nel caso di una superficie priva di attrito questo metodo si può utilizzare in alternativa al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Punto vincolato su una curva con attrito

Per determinare l'equilibrio di un punto materiale vincolato ad appartenere ad una curva con attrito la scelta più conveniente consiste nel proiettare la condizione di equilibrio del punto:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi} = 0$$

sul triedro di Frenet della curva, cioè sulla base ortonormale dei versori tangente, normale e binormale: $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$, che si ottengono note le equazioni parametriche della curva:

$$OP = OP(s)$$

dalle relazioni:

$$\boldsymbol{T} = \frac{dP}{ds}, \qquad \boldsymbol{N} = \rho\,\frac{d^2P}{ds^2}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N}$$

Al sistema di tre equazioni ottenuto si aggiunge la legge dell'attrito statico di Coulomb-Morin specializzata per una curva. Il sistema delle condizioni di equilibrio così ottenuto è allora il seguente:

$$\begin{cases} F_T + \Phi_T = 0 \\ F_N + \Phi_N = 0 \\ F_B + \Phi_B = 0 \\ |\Phi_T| \leq f_s\sqrt{\Phi_N^2 + \Phi_B^2} \end{cases} \tag{SP.13}$$

Eliminando le componenti della reazione vincolare, mediante le prime tre equazioni, nella legge dell'attrito, si ottiene la disequazione:

$$|F_T(s,t)| \leq f_s\sqrt{F_N^2(s,t) + F_B^2(s,t)} \tag{SP.14}$$

nell'unica incognita s che individua la posizione del punto sulla curva. Restano così definiti degli intervalli di valori di s per i quali il punto si trova in equilibrio. Dalle rimanenti condizioni si ottengono poi le componenti delle reazioni vincolari corrispondenti.

Come caso particolare, quando il coefficiente di attrito statico è nullo, la curva risulta essere priva di attrito, quindi $\Phi_T = 0$ e il sistema precedente si riduce a un sistema, staticamente determinato, di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} F_T(s,t) = 0 \\ \\ F_N(s,t) + \Phi_N = 0 \\ \\ F_B(s,t) + \Phi_B = 0 \end{cases} \tag{SP.15}$$

La prima equazione non contiene reazioni vincolari, e quindi, costituisce l'equazione pura dell'equilibrio. Risolta questa rispetto ad s si sostituiscono le soluzioni trovate nelle rimanenti equazioni, determinando le componenti della reazione vincolare all'equilibrio.

Osserviamo che, in statica, le forze possono dipendere nella forma più generale, da s e da t e nel caso particolare in cui la componente tangente della forza attiva dipenda solo da s, essendo il punto vincolato a muoversi su un'unica curva, la forza attiva risulta essere conservativa in quanto la forma differenziale del lavoro vale:

$$dL = \boldsymbol{F} \times dP = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{T} ds = F_T(s)\, ds = d \int_{s_0}^{s} F_T(\hat{s})\, d\hat{s}$$

e quindi le posizioni di equilibrio del punto sulla curva rappresentano gli estremanti del potenziale:

$$U(s) = \int_{s_0}^{s} F_T(\hat{s})\, d\hat{s}$$

• Notiamo come, nel caso in cui la curva sia priva di attrito, la metodologia ora esposta costituisce una via alternativa a quella dei moltiplicatori di Lagrange. Il metodo dei moltiplicatori opera con le variabili vincolate x, y, z, mentre il metodo del triedro di Frenet opera con la variabile indipendente s, che costituisce l'unico parametro lagrangiano, avendo il problema un solo grado di libertà.

Statica relativa del punto

Si ha un problema di statica relativa quando si cercano le condizioni di equilibrio rispetto ad un osservatore $\Omega\xi\eta\zeta$ che si muove di un moto qualunque rispetto ad un osservatore inerziale $Oxyz$.

Per affrontare questo tipo di problema occorre considerare due osservatori: un osservatore inerziale, che si denomina *assoluto* e l'osservatore in moto qualunque rispetto ad esso, che in generale non sarà inerziale, rispetto al quale vogliamo studiare l'equilibrio di un punto materiale e che chiamiamo osservatore *relativo.*

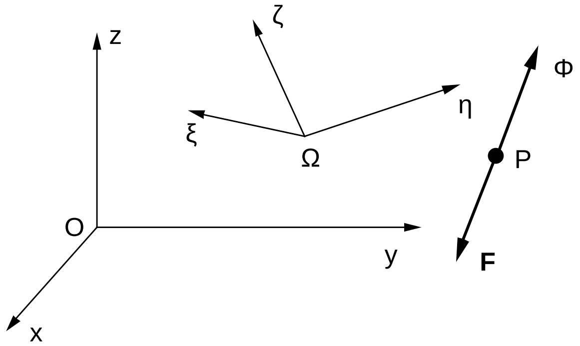

Figura SP. 3: equilibrio relativo di un punto

Facciamo anche l'ipotesi che le forze dipendano solo dalle mutue distanze tra il punto che costituisce il nostro sistema meccanico e i punti interagenti esterni al sistema. In tal modo nel passaggio da un osservatore all'altro le forze risultano rappresentate sempre dagli stessi vettori, in quanto le distanze sono invarianti rispetto alle trasformazioni di rototraslazione degli assi (trasformazioni euclidee) e quindi tutte le loro funzioni risultano di conseguenza invarianti.

Il punto P di cui vogliamo studiare l'equilibrio rispetto al sistema relativo si troverà, generalmente in moto rispetto al sistema assoluto; ed essendo quest'ultimo un sistema inerziale il moto di P risulta governato dall'equazione fondamentale della dinamica, che scriviamo per un punto che, in generale, può essere soggetto a vincoli:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(a)} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi} \tag{SP.16}$$

avendo etichettato con $^{(a)}$ l'accelerazione assoluta, mentre le forze, essendo le stesse rispetto ad entrambi gli osservatori, non sono state etichettate.

Per vedere come la (SP.16) si trasforma nel passaggio dall'osservatore assoluto all'osservatore relativo, dobbiamo far uso del teorema di Coriolis (MR.26) che ci dà il legame tra le accelerazioni rispetto ai due osservatori:

$$\boldsymbol{a}^{(a)} = \boldsymbol{a}^{(r)} + \boldsymbol{a}^{(\tau)} + \boldsymbol{a}^{(c)}$$

dove $\boldsymbol{a}^{(r)}$ è l'accelerazione relativa e le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis sono date da:

$$\boldsymbol{a}^{(\tau)} = \boldsymbol{a}_{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega P - \boldsymbol{\omega}^2 QP, \qquad \boldsymbol{a}^{(c)} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)}$$

La sostituzione del teorema di Coriolis nell'equazione del moto di P rispetto al sistema assoluto (SP.16) comporta:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(r)} + m\,\boldsymbol{a}^{(\tau)} + m\,\boldsymbol{a}^{(c)} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi} \tag{SP.17}$$

Imporre che il punto P sia in equilibrio rispetto al sistema relativo, supposto valido il teorema di unicità, comporta che esso sia in quiete rispetto allo stesso sistema, e quindi che si abbia:

$$\boldsymbol{a}^{(r)} = 0, \qquad \boldsymbol{v}^{(r)} = 0, \qquad \forall t \geq 0$$

Di conseguenza nella (SP.17) si ha:

$$m\,\boldsymbol{a}^{(\tau)} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}$$

che si riscrive:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{F}^{(\tau)} = 0 \tag{SP.18}$$

dove si è introdotto il vettore:

$$\boldsymbol{F}^{(\tau)} = -m\,\boldsymbol{a}^{(\tau)} \tag{SP.19}$$

ovvero:

$$\boldsymbol{F}^{(\tau)} = -m\,\boldsymbol{a}_{\Omega} - m\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega P + m\,\boldsymbol{\omega}^2 QP \tag{SP.20}$$

al quale si dà il nome di *forza di trascinamento.* La forza di trascinamento non rappresenta una forza di interazione fra il punto P e i punti esterni al sistema, ma nasce come conseguenza della non inerzialità dell'osservatore relativo, a causa del fatto che le accelerazioni si trasformano, nel passaggio dall'osservatore assoluto a quello relativo, secondo una legge di trasformazione differente da quella con cui si trasformano le forze.

Questo risultato si può interpretare nel modo seguente:

• Per passare dalla condizione di equilibrio rispetto ad un osservatore inerziale a quella rispetto ad un osservatore non inerziale (equilibrio relativo) occorre *aggiungere alle forze attive la forza di trascinamento.*

Potenziale della forza centrifuga

Il contributo:

$$\boldsymbol{F}_{centrif.} = m\,\omega^2 QP \tag{SP.21}$$

che compare nell'espressione della forza di trascinamento prende usualmente il nome di *forza centrifuga.*

• Quando il sistema relativo si muove di moto rotatorio uniforme (cioè $\boldsymbol{\omega}$ è costante) rispetto al sistema assoluto allora la forza centrifuga è una forza conservativa.

Infatti il suo lavoro, rispetto all'osservatore relativo vale:

$$dL = m\,\omega^2 QP \times d\Omega P$$

e può essere portato sotto forma di differenziale esatto di una funzione potenziale. Per calcolarlo conviene introdurre le seguenti rappresentazioni:

$$\Omega P = \Omega Q + QP = q\boldsymbol{k} + r\boldsymbol{u}$$

essendo:

$$\Omega Q = q\boldsymbol{k}, \qquad q = \Omega Q \times \boldsymbol{k}, \qquad QP = r\boldsymbol{u}, \qquad r = |QP|, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$$

Dunque, $\boldsymbol{k}$ è il versore di $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{u}$ è il versore di QP. Allora, tenendo conto che per ipotesi $\boldsymbol{k}$ è costante, lo spostamento del punto P si rappresenta come:

$$d\Omega P = \boldsymbol{k}dq + \boldsymbol{u}dr + rd\boldsymbol{u}$$

Introducendo questa espressione nel calcolo del lavoro della forza centrifuga e tenendo conto che, per definizione:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{k} = 0$$

e:

$$\boldsymbol{u}^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{u} = 0$$

otteniamo:

$$dL = m\,\omega^2 r\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{k}dq + \boldsymbol{u}dr + rd\boldsymbol{u}) = m\,\omega^2 rdr = d\left(\frac{1}{2}\,m\,\omega^2 r^2 + C\right)$$

che è un differenziale esatto di una funzione regolare a un sol valore. Dunque la forza centrifuga, in queste condizioni, risulta essere conservativa e il suo potenziale è dato da:

$$U_{centrif.} = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 r^2 \tag{SP.22}$$

avendo scelto lo zero del potenziale sull'asse di rotazione ($r = 0$) ovvero la costante $C = 0$.

Il risultato (SP.22) può essere interpretato in una maniera utile per il calcolo diretto del potenziale della forza centrifuga relativo a un osservatore in rotazione uniforme, osservando che la sua espressione si identifica con l'energia cinetica di un punto di massa m che si muove di moto circolare uniforme con velocità ωr. E' facile rendersi conto che ωr non è altro che il modulo della *velocità di trascinamento* del punto P. Infatti, se il moto del sistema relativo rispetto al sistema assoluto è puramente rotatorio e scegliamo Ω sull'asse di rotazione, abbiamo:

$$\boldsymbol{v}^{(\tau)} = \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P = \omega r\, \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}$$

E quindi l'energia cinetica associata al moto di trascinamento del punto è proprio:

$$T^{(\tau)} = \frac{1}{2} m\, \omega^2 r^2$$

essendo $\boldsymbol{w}$ un versore.

In conclusione abbiamo ottenuto il seguente risultato:

• Quando il sistema relativo si muove di moto rotatorio uniforme (cioè $\boldsymbol{\omega}$ è costante) rispetto al sistema assoluto allora la forza centrifuga è una forza conservativa e il suo potenziale è uguale all'energia cinetica associata al moto di trascinamento del punto.

Forza peso

Un esempio tipico di equilibrio relativo è dato dal problema della determinazione statica della forza peso. Quando abbiamo un corpo schematizzabile con un punto, soggetto alla forza peso, in equilibrio sulla superficie terrestre, noi chiamiamo *peso* la forza $m\, \boldsymbol{g}$ risultante dell'attrazione gravitazionale e della forza di trascinamento prodotta dalla rotazione della terra attorno all'asse terrestre e la valutiamo misurando l'intensità della forza necessaria a mantenere in equilibrio il punto. La terra, in rotazione attorno al proprio asse è un sistema non inerziale, essendo in moto accelerato rispetto all'osservatore solidale con le stelle fisse, per cui l'equilibrio di un punto sulla superficie terrestre è un equilibrio relativo.

Per studiare l'equilibrio relativo dobbiamo considerare un sistema inerziale avente origine nel centro della terra e assi diretti verso le stelle fisse (trascuriamo in questo modo il moto traslatorio della terra la cui entità è poco rilevante rispetto alla rapidità della rotazione propria) e un sistema relativo, non inerziale, avente sempre l'origine nel centro della terra, ma gli assi solidali con la terra, schematizzata con una sfera rigida omogenea. Gli assi z e ζ dei due riferimenti vengono supposti coincidenti con l'asse di rotazione propria della terra.

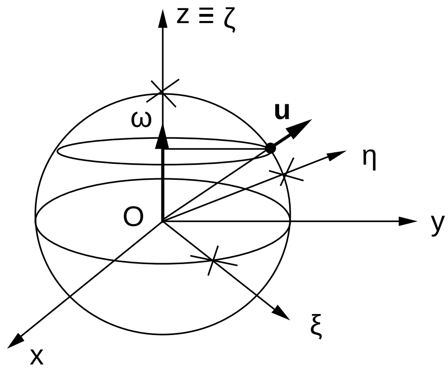

Figura SP. 4: equilibrio relativo sulla superficie terrestre

Nella condizione di equilibrio relativo (SP.18) la forza attiva è la forza gravitazionale che la terra esercita sul punto:

$$\boldsymbol{F} = -h\,\frac{Mm}{R^2}\,\boldsymbol{u}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è il versore del vettore OP uscente dalla superficie della terra, M la massa terrestre, R il raggio della terra. Per determinare la forza di trascinamento valutiamo prima l'accelerazione di trascinamento. Tenendo conto che la rotazione terrestre è uniforme e che l'origine del sistema relativo Ω coincide con l'origine del sistema assoluto O, abbiamo:

$$\boldsymbol{a}_\Omega = 0, \qquad\qquad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

E quindi otteniamo:

$$\boldsymbol{a}^{(\tau)} = -\boldsymbol{\omega}^2 QP \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{F}^{(\tau)} = m\boldsymbol{\omega}^2 QP$$

Di conseguenza la condizione di equilibrio relativo si scrive:

$$-h\,\frac{Mm}{R^2}\,\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{\omega}^2 QP + \boldsymbol{\Phi} = 0$$

relazione che abitualmente scriviamo nella forma:

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\Phi} = 0$$

Dal confronto otteniamo la caratterizzazione del peso:

$$m\boldsymbol{g} = -h\,\frac{Mm}{R^2}\,\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{\omega}^2 QP \tag{SP.23}$$

e quindi del campo $\boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{g} = -h\,\frac{M}{R^2}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\omega}^2 QP \tag{SP.24}$$

Come conseguenza di questo risultato abbiamo le informazioni seguenti:

— La forza peso è un vettore la cui retta d'azione non passa esattamente per il centro della terra se si eccettuano i casi in cui ci si trovi ai poli o all'equatore;

— la forza peso risulta essere massima ai poli (dove la forza centrifuga è nulla) e minima all'equatore (dove la forza centrifuga è massima).

Equilibrio relativo su un piano ruotante con attrito

Un altro esempio di equilibrio relativo di un certo interesse è rappresentato dall'equilibrio di un punto materiale soggetto alla forza peso, rispetto ad una piattaforma rigida orizzontale, che ruota uniformemente attorno ad un asse verticale, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$.

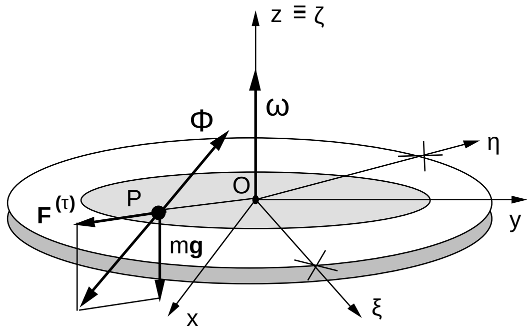

Figura SP. 5: equilibrio relativo in presenza di attrito

In questo caso alla forza peso agente sul punto P dobbiamo aggiungere, nella condizione di equilibrio relativo, la forza di trascinamento dovuta alla rotazione del sistema relativo, solidale con la piattaforma ruotante, che è rappresentata dalla forza centrifuga:

$$\boldsymbol{F}^{(\tau)} = m\,\boldsymbol{\omega}^2 OP$$

dal momento che la proiezione Q di P sull'asse di rotazione coincide con O. La condizione di equilibrio relativo si scrive allora:

$$m\boldsymbol{g} + m\,\boldsymbol{\omega}^2 OP + \boldsymbol{\Phi} = 0 \qquad \text{(SP.25)}$$

Conviene scegliere il riferimento assoluto e il riferimento relativo, solidale alla piattaforma, in modo che le origini O e Ω siano coincidenti, e gli assi z

del sistema assoluto $Oxyz$ e ζ del sistema relativo $\Omega\xi\eta\zeta$ siano coincidenti con l'asse di rotazione della piattaforma. Utilizzando le coordinate polari nel piano orizzontale xy possiamo esprimere:

$$OP = r\boldsymbol{u}, \qquad r = |OP|$$

e quindi la forza centrifuga:

$$\boldsymbol{F}^{(\tau)} = m\,\boldsymbol{\omega}^2 r\boldsymbol{u}$$

La reazione vincolare e la forza peso si decompongono come:

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi_r\boldsymbol{u} + \Phi_\vartheta\boldsymbol{w} + \Phi_n\boldsymbol{n}, \qquad m\,\boldsymbol{g} = -mg\,\boldsymbol{n}$$

Proiettando la (SP.25) sulla base del sistema relativo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n}$ otteniamo tre equazioni alle quali va aggiunta la legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico. Si ha così il sistema completo delle condizioni di equilibrio relativo del punto sulla piattaforma con attrito:

$$\begin{cases} m\,\boldsymbol{\omega}^2 r + \Phi_r = 0 \\ \Phi_\vartheta = 0 \\ -mg + \Phi_n = 0 \\ \sqrt{\Phi_r^2 + \Phi_\vartheta^2} \leq f_s|\Phi_n| \end{cases} \tag{SP.26}$$

Eliminando le reazioni vincolari nella legge dell'attrito, mediante le altre relazioni, otteniamo la condizione pura dell'equilibrio:

$$m\,\boldsymbol{\omega}^2 r \leq f_s mg \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \leq \frac{f_s g}{\boldsymbol{\omega}^2}$$

Resta in questo modo definita la regione in cui, in presenza di attrito, il punto rimane in equilibrio sulla piattaforma:

$$\mathcal{D} = \{(r, \vartheta, 0) \in R^3 \;\; r \leq r_0\}$$

che è costituita da una regione circolare di raggio:

$$r_0 = \frac{f_s g}{\boldsymbol{\omega}^2}$$

centrata nell'origine.