

Principi della meccanica

PM. Principi della meccanica

Richiamiamo in questo capitolo i principi della dinamica che sono noti dalla fisica e che ci serviranno come base per lo sviluppo della statica e della dinamica. Ad essi aggiungiamo anche alcune informazioni e considerazioni inerenti l'attrito e la natura dei vincoli. Partiamo dai tre principi della dinamica newtoniana.

- *Primo principio della dinamica* o *principio d'inerzia*: un punto materiale non soggetto a forze si trova in quiete o in moto rettilineo uniforme.
- *Secondo principio della dinamica* o *equazione fondamentale della dinamica*: un punto materiale soggetto a un forza \mathbf{F} si muove con un'accelerazione direttamente proporzionale alla forza secondo la legge:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (\text{PM.1})$$

La costante m caratteristica del punto materiale prende il nome di *massa inerziale* e risulta uguale alla *massa gravitazionale* che compare nella legge della forza peso (LP.24).

- *Terzo principio della dinamica* o *principio di azione e reazione*: dato un sistema di punti materiali interagenti tra loro, le forze che tali punti si scambiano a due a due (forze interne) sono uguali in modulo, di verso opposto, e hanno la stessa retta d'azione che coincide con la retta congiungente i due punti; ovvero sono riducibili a coppie di braccio nullo.

Come è evidente il primo principio, nella sua formulazione classica, non è indipendente dal secondo, ma ne è una diretta conseguenza. Infatti basta porre $\mathbf{F} = 0$ nella (PM.1) per ottenere, essendo $m \neq 0$, $\mathbf{a} = 0$ e cioè il primo principio.

La formulazione del primo principio, come è stata data, ha una ragione storica, in quanto esso fu stabilito prima del secondo principio. Tuttavia,

una volta stabilita la (PM.1) esso diviene superfluo. Però l'esperienza mostra che il secondo principio non è valido per ogni osservatore, ma solo per una particolare classe di osservatori ai quali si dà il nome di *inerziali*. Allora il primo principio della dinamica si sostituisce con il postulato dell'esistenza di almeno un osservatore rispetto al quale il secondo principio risulta valido. Praticamente si ritiene inerziale l'osservatore solidale con le stelle fisse.

Ai tre principi della dinamica classica si aggiungono le seguenti leggi della meccanica.

- *Principio di relatività galileiana*: non è possibile mediante esperimenti di meccanica stabilire se ci si trova in quiete o in moto rettilineo uniforme; ovvero: i concetti di quiete e di moto rettilineo uniforme non sono assoluti, ma relativi ad un osservatore al quale vengono riferiti.

Questo risultato si spiega, come vedremo trattando della dinamica relativa, per il fatto che due osservatori in moto rettilineo uniforme, dei quali uno sia inerziale, risultano esserlo entrambi e, di conseguenza, i fenomeni meccanici rispetto a ciascuno di essi obbediscono alla stessa legge (PM.1).

- *Principio di composizione delle forze*: questo principio esprime il carattere vettoriale della (PM.1). Esso si può enunciare nel modo seguente: se una forza \mathbf{F}_1 applicata ad un punto produce un'accelerazione \mathbf{a}_1 e una forza \mathbf{F}_2 applicata allo stesso punto produce un'accelerazione \mathbf{a}_2 , quando le due forze vengono applicate simultaneamente, esse producono l'accelerazione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ corrispondente all'effetto della forza risultante $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Ciò significa che, agli effetti dinamici, un insieme di due o più forze applicate allo stesso punto, può essere sostituito con una sola forza pari al loro risultante.

Per trattare i problemi di meccanica celeste ci occorre anche la conoscenza della:

- *Legge di gravitazione universale di Newton*: la forza gravitazionale che una massa puntiforme M esercita su un'altra massa puntiforme m è data da:

$$\mathbf{F} = -h \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u} \quad (\text{PM.2})$$

dove h è la costante universale di Cavendish, r è la distanza fra le due masse e \mathbf{u} il versore della congiungente le due masse uscente dal punto di massa M .

Si aggiungono a queste le leggi riguardanti i vincoli e l'attrito. Quando si studia il moto di un punto materiale vincolato, per poter trattare l'azione del vincolo in termini di una *forza* e valutarne quindi gli effetti dinamici, si assume la validità del seguente:

- *Postulato delle reazioni vincolari:* ad ogni vincolo agente su un punto materiale può essere sostituita una forza che realizza lo stesso effetto dinamico del vincolo. Tale forza prende il nome di *reazione vincolare*. La reazione vincolare si può allora interpretare come *la forza che il vincolo deve esplicare sul punto per mantenerlo vincolato*. Chiaramente se il vincolo agisce su un sistema di più punti materiali, ad ogni punto risulta applicata una reazione vincolare che produce gli stessi effetti del vincolo.

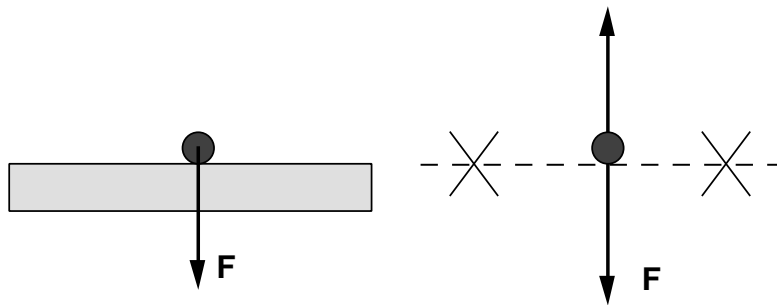


Figura PM. 1: sostituzione di un vincolo con la corrispondente reazione vincolare

Le forze esplicate dai vincoli (*reazioni vincolari*) vengono denotate con la lettera greca Φ per distinguerle dalle forze di natura non vincolare, alle quali si dà il nome di *forze attive* e che si denotano usualmente con \mathbf{F} , salvo

che vengano specificate indicazioni in contrario. Con questa convenzione la (PM.1), quando si ha a che fare con punti vincolati e risulta utile separare le forze attive dalle reazioni vincolari, si riscrive:

$$\mathbf{F} + \mathbf{\Phi} = m\mathbf{a} \quad (\text{PM.3})$$

Va osservato che, per determinare il moto di un punto da una legge come la (PM.3), occorre la conoscenza delle forze; tuttavia, normalmente, si riesce a conoscere solo la forza attiva agente su un punto, mentre la reazione vincolare è un'ulteriore incognita. Allora per determinare sia il moto che la $\mathbf{\Phi}$ occorre, generalmente, aggiungere alla (PM.3) qualche informazione sui vincoli, in modo da portare il numero delle equazioni di cui si dispone ad uguagliare il numero delle incognite del problema rendendolo, così, determinato. Queste ulteriori informazioni sono legate alla conoscenza delle leggi dell'attrito e alla definizione di vincolo liscio.

Attrito

Dal punto di vista macroscopico si può pensare un vincolo come realizzato da un corpo che, mediante un'azione di contatto, impedisce ad un altro corpo di assumere determinate posizioni e di compiere determinati spostamenti. Il contatto tra due corpi avviene, fisicamente, in *superfici di contatto* più o meno estese: pensare ad un solo punto o ad una curva di contatto è, in effetti, un'astrazione matematica, che in taluni casi costituisce tuttavia una descrizione accettabile e che semplifica la trattazione del problema. In realtà, dal punto di vista fisico, possiamo pensare sempre all'esistenza di una *superficie di contatto* nei punti della quale sono applicate, al corpo vincolato, le reazioni vincolari (superficie del vincolo). Caratterizzando con:

$$f(x, y, z) = 0$$

l'equazione cartesiana della superficie di contatto, rispetto ad una terna di assi ortogonali $Oxyz$, e considerando una qualunque di queste reazioni vincolari, possiamo decomporla in una componente normale alla superficie e in una componente sul piano tangente alla superficie stessa, nel punto di applicazione della Φ .

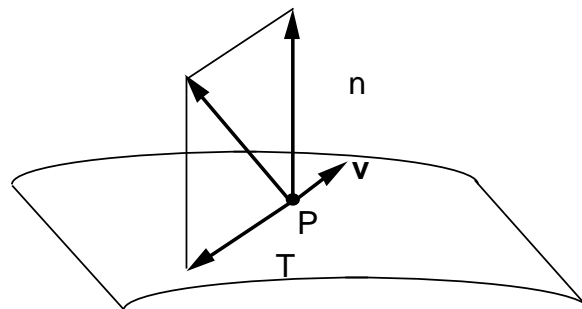


Figura PM. 2: attrito su una superficie

Possiamo così rappresentare la reazione vincolare come somma vettoriale delle due componenti tangente e normale:

$$\Phi = \Phi_T u + \Phi_n n \quad (\text{PM.4})$$

dove:

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

rappresenta il versore normale alla superficie di contatto e u è il versore della componente della reazione vincolare sul piano tangente.

Chiamiamo *attrito* la componente della reazione vincolare sul piano tangente alla superficie di contatto con il vincolo. Ne consegue che:

- In una superficie (o in una curva) priva di attrito la reazione vincolare è sempre normale alla superficie del vincolo oppure è nulla.

attrito dinamico

- L'esperienza mostra che se il punto di applicazione della Φ si muove con una velocità $v \neq 0$ rispetto alla superficie del vincolo, allora il versore u dell'attrito è opposto al versore della velocità:

$$u = -\frac{v}{|v|}$$

Inoltre gli esperimenti mostrano che, quando $v \neq 0$ la componente Φ_T , che rappresenta l'attrito, è legata alla componente normale Φ_n da una relazione di proporzione diretta del tipo:

$$|\Phi_T| = f_d |\Phi_n| \quad (\text{PM.5})$$

nota come *legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico*.

La costante di proporzionalità f_d si dice *coefficiente di attrito dinamico* ed è caratteristica dei materiali che venendo a contatto realizzano l'attrito. La struttura dell'equazione (PM.5) suggerisce in maniera naturale l'introduzione dell'*angolo di attrito dinamico* definito dalla relazione:

$$\tan \varphi_d = \frac{|\Phi_T|}{|\Phi_n|} = f_d \quad (\text{PM.6})$$

L'angolo di attrito viene a rappresentare l'angolo compreso tra la reazione vincolare Φ e il vettore $\Phi_n \mathbf{n}$. Poichè la velocità del punto di applicazione della Φ può assumere qualunque direzione sul piano tangente, ne viene di conseguenza che anche l'attrito $\Phi_T u$ può assumere tutte queste direzioni. Quindi la Φ può assumere, al variare di u , la direzione di qualsiasi generatrice

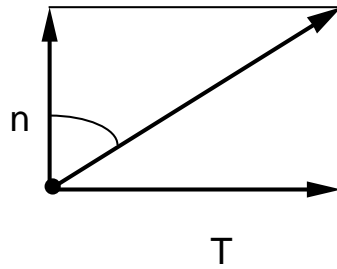


Figura PM. 3: angolo di attrito

del cono circolare retto di semiapertura φ_d , avente come asse di simmetria la retta normale alla superficie condotta per il punto di applicazione della reazione vincolare. A tale cono si dà perciò il nome di *cono di attrito dinamico*.

- Nel caso dinamico la Φ giace sempre sul cono di attrito. In particolare il cono avrà una sola falda se il vincolo è unilaterale e due falde se il vincolo è bilaterale.

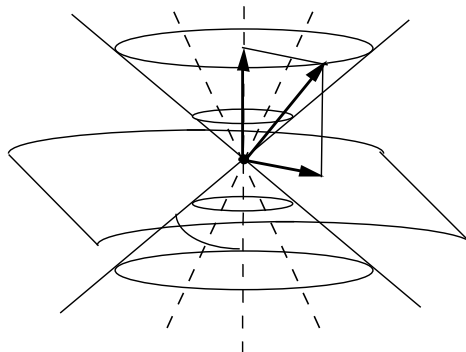


Figura PM. 4: cono di attrito di una superficie

Ci sono casi in cui il vincolo può essere idealizzato, in prima

approssimazione con una curva di contatto, anzichè con una superficie: un esempio tipico è dato da un punto materiale vincolato a muoversi su una curva assegnata. Questa schematizzazione rappresenta, evidentemente, un'astrazione, in quanto la *curva* sarà realizzata in pratica con una guida o, comunque, mediante un corpo che è dotato di una superficie, e il *punto* sarà, di fatto, un cursore o un anello che scorre sulla guida. Quindi, nella realtà vi saranno sempre delle superfici di contatto. In prima approssimazione, però, può essere sufficiente una descrizione unidimensionale del problema che approssima la guida ad una curva e il cursore ad un punto. Se si adotta questo schema la legge dell'attrito dinamico (PM.5) risulta ancora applicabile.

In tal caso, però, non avremo una sola normale, ma un intero piano normale alla curva, mentre non avremo più un piano tangente, ma una retta tangente alla curva. E' conveniente proiettare allora la reazione vincolare Φ sul triedro di Frenet:

$$\Phi = \Phi_T \mathbf{T} + \Phi_N \mathbf{N} + \Phi_B \mathbf{B}$$

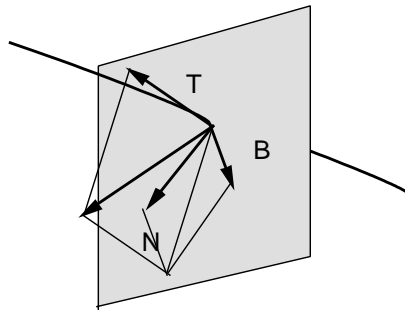


Figura PM. 5: attrito su una curva

essendo \mathbf{T} il versore tangente, \mathbf{N} il versore normale principale e \mathbf{B} il versore binormale. La componente lungo la tangente rappresenta l'attrito. La componente della Φ normale alla curva risulta in questo caso espressa mediante la composizione $\Phi_N \mathbf{N} + \Phi_B \mathbf{B}$ e quindi il suo modulo vale:

$$|\Phi_n| = \sqrt{\Phi_N^2 + \Phi_B^2}$$

Di conseguenza la legge di Coulomb-Morin per l'attrito dinamico si può specializzare al caso di una curva di contatto come:

$$|\Phi_T| = f_d \sqrt{\Phi_N^2 + \Phi_B^2} \quad (\text{PM.7})$$

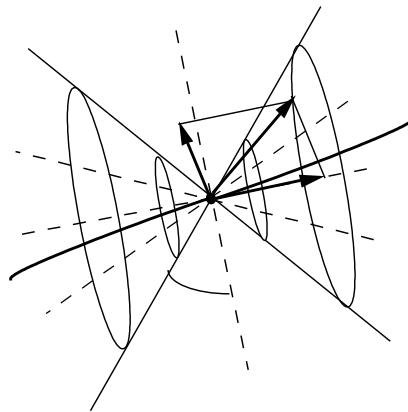


Figura PM. 6: cono di attrito di una curva

La reazione vincolare Φ viene ad avere la direzione della generatrice di un cono di semiapertura $\frac{\pi}{2} - \varphi_d$ che rappresenta il cono di attrito dinamico relativo alla curva.

attrito statico

Diverso è il comportamento dell'attrito nel caso in cui il punto di applicazione della reazione vincolare considerata abbia velocità nulla rispetto alla superficie o alla curva di contatto, cioè si abbia $v = 0$ in un certo intervallo di tempo. In questo caso si parla di *attrito statico*.

L'esperienza fornisce per questo caso la *legge di Coulomb-Morin per l'attrito statico*:

$$|\Phi_T| \leq f_s |\Phi_n| \quad (\text{PM.8})$$

nella quale il significato di Φ_T, Φ_n è lo stesso, mentre f_s , che prende il nome di *coefficiente di attrito statico* ha in genere un valore diverso da quello di f_d . In questa situazione l'attrito non ha una direzione identificata da nessuna velocità, perchè non c'è alcun moto. La direzione e il verso sono invece identificate dalle condizioni che garantiscono l'equilibrio del sistema meccanico considerato, come si vedrà in statica.

Si definisce poi un *angolo di attrito statico* mediante la relazione:

$$\tan \varphi_s = f_s \quad (\text{PM.9})$$

e così pure un *cono di attrito statico* in maniera del tutto analoga al caso dinamico.

La presenza della disuguaglianza, nella legge dell'attrito statico (PM.8) comporta il fatto che la reazione vincolare cade *non esternamente* alla regione di spazio delimitata dal cono di attrito statico e solo come caso limite si può trovare sulla superficie del cono.

Per comprendere il senso fisico della disuguaglianza nella (PM.8) consideriamo, a titolo di esempio, un piano con attrito, inclinato di un angolo α rispetto al piano orizzontale. Poniamo poi un copro pesante, di massa m , schematizzato con il suo baricentro G , sul piano inclinato. La reazione vincolare Φ , se il punto si mantiene in quiete, per cui $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{a} = 0$, grazie alla (PM.3) è tale che:

$$m\mathbf{g} + \Phi = 0$$

Proiettando sul piano e sulla normale ad esso abbiamo, di conseguenza:

$$|\Phi_T| = |\Phi| \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$|\Phi_n| = |\Phi| \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

che sostituite nella (PM.8) comportano:

$$\tan \alpha \leq \tan \varphi_s$$

e poichè gli angoli in questione sono, per definizione, acuti o al più retti, segue:

$$\alpha \leq \varphi_s$$

Questo significa che l'attrito statico può garantire che il corpo appoggiato rimanga nelle condizioni in cui si trova, per cui $v = 0$, $a = 0$, cioè in quiete, fino a che l'angolo α di inclinazione del piano non supera l'angolo di attrito statico φ_s , cioè fino a che la reazione vincolare Φ si mantiene non esterna al cono di attrito statico.

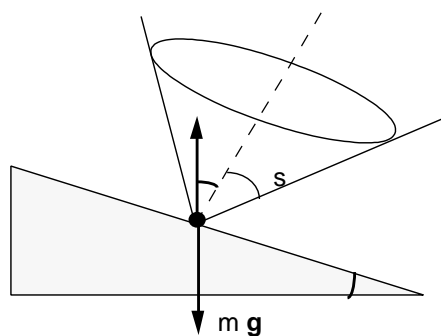


Figura PM. 7: piano inclinato con attrito statico

Come per l'attrito dinamico anche nel caso dell'attrito statico la (PM.8) si può specializzare per una curva dotata di attrito, nella forma:

$$|\Phi_T| \leq f_s \sqrt{\Phi_N^2 + \Phi_B^2} \quad (\text{PM.10})$$

vincoli privi di attrito

L'esperienza ci mostra che l'attrito tende a compiere lavoro negativo dissipando energia; un vincolo privo di attrito, invece, non dissipa energia. In particolare è immediato verificare che il *lavoro virtuale* delle reazioni vincolari, in un vincolo privo di attrito, è sempre non negativo, qualunque sia lo spostamento virtuale considerato.

Per rendercene conto possiamo considerare una superficie, priva di attrito che vincola un sistema materiale qualunque. Per semplicità supponiamo che il contatto avvenga in un numero finito di punti P_1, P_2, \dots, P_n ai quali sono applicate le reazioni vincolari $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, l'estensione al continuo potendosi fare senza difficoltà.

Consideriamo la generica reazione Φ_s applicata in P_s : non essendoci attrito essa risulta normale alla superficie e il suo lavoro è nullo per tutti gli spostamenti virtuali che appartengono al piano tangente alla superficie, che sono tutti reversibili, e se il vincolo è unilaterale, è positivo per tutti gli spostamenti di distacco dalla superficie, che sono tutti irreversibili. Infatti:

$$\delta L_s = \Phi_s \times \delta P_s = |\Phi_s| |\delta P_s| \cos \vartheta_s \geq 0 \quad \forall \delta P_s$$

essendo l'angolo ϑ_s tra la reazione vincolare e lo spostamento, acuto per gli spostamenti irreversibili e retto per gli spostamenti reversibili. Questa

relazione vale per ogni reazione vincolare agente sul sistema meccanico e quindi il lavoro totale delle reazioni vincolari risulta essere la somma di lavori non negativi ed è dunque non negativo.

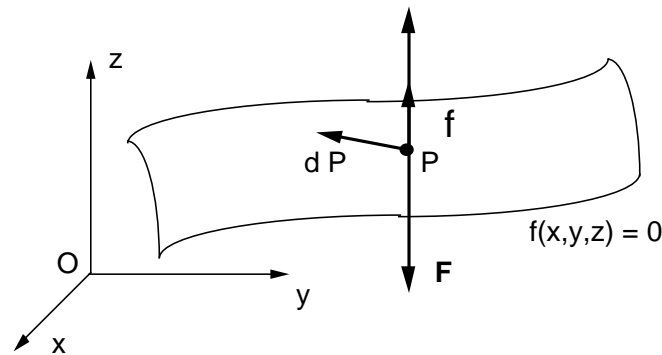


Figura PM. 8: superficie priva di attrito

Le stesse considerazioni si possono ripetere anche nel caso di una curva priva di attrito. Osserviamo che il ricorso ai lavori virtuali, anzichè ai lavori possibili si giustifica per il fatto che i lavori virtuali non tengono conto delle eventuali variazioni dei vincoli nel tempo il cui contributo potrebbe alterare il segno dei lavori in un modo che dipenderebbe, caso per caso, dalla legge con cui i vincoli variano nel tempo.

Principio delle reazioni vincolari

Siamo così condotti, da queste considerazioni, ad introdurre un nuovo principio detto *principio delle reazioni vincolari* che rappresenta la *definizione* di una classe speciale di vincoli nota col nome di *vincoli lisci* e si enuncia nella maniera seguente:

Si dicono lisci quei vincoli che sono capaci di esplicitare tutte e solamente quelle forze (che sono le reazioni vincolari) il cui lavoro virtuale risulta non negativo, per ogni spostamento virtuale

ovvero in formula:

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \forall \delta P_s \quad (\text{PM.11})$$

essendo:

$$\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^n \Phi_s \times \delta P_s$$

Da questa definizione nascono le seguenti conseguenze:

- In presenza di vincoli lisci, *solamente* le reazioni vincolari possono esplicitare un lavoro non negativo per ogni spostamento virtuale: quindi, se si trovano delle forze che soddisfano tale condizione, esse sono necessariamente delle reazioni vincolari. Anticipiamo fin d'ora che questa conseguenza sarà chiamata in causa nella dimostrazione della sufficienza del principio dei lavori virtuali.

- Nella classe dei vincoli lisci, così definiti, vengono a trovarsi tutti i *vincoli privi di attrito* e inoltre anche quei vincoli in cui l'attrito, pur essendo presente, non dissipa energia. Perciò la classe dei vincoli lisci definiti dal principio delle reazioni vincolari è più generale della classe dei vincoli privi di attrito.

Consideriamo ora due casi notevoli di *vincolo liscio* che non sono riconducibili all'usuale definizione di vincolo privo di attrito e che soddisfano tuttavia il principio delle reazioni vincolari.

corpo rigido con un punto fisso

Consideriamo un corpo rigido con un punto fisso Ω . E' chiaro che, dal punto di vista fisico, il vincolo di un punto fisso si può realizzare con una cerniera che non è un punto privo di dimensioni, ma ha una sua struttura, con delle superfici di contatto, e se non vi è attrito le reazioni vincolari saranno normali alla superficie del vincolo. Tuttavia nell'idealizzazione matematica che noi operiamo, schematizzando tale vincolo con un punto privo di dimensioni, non abbiamo superfici rispetto alle quali tracciare delle normali. Perciò non siamo in grado di stabilire se il vincolo sia privo di attrito o meno. Possiamo, però, verificare che il vincolo è liscio nel senso definito dal principio delle reazioni vincolari.

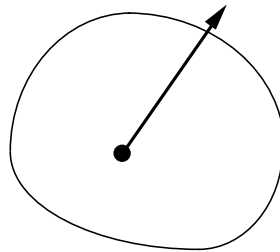


Figura PM. 9: corpo rigido con un punto fisso

Infatti, essendo il vincolo costituito da un solo punto, la reazione vincolare può essere applicata solamente nel punto fisso Ω e il suo lavoro risulta essere:

$$\delta L^{(v)} = \mathbf{\Phi} \times \delta \Omega = 0$$

in quanto $\delta \Omega = 0$ essendo proibito al punto fisso ogni spostamento. E così il principio delle reazioni vincolari risulta soddisfatto.

vincolo di puro rotolamento

Un altro caso notevole di vincolo liscio è dato dal *vincolo di puro rotolamento*. Consideriamo, per esempio, un disco rigido che rotola senza strisciare su una curva. In questo caso l'esperienza ci mostra che l'attrito deve essere presente, altrimenti il disco striscerebbe.

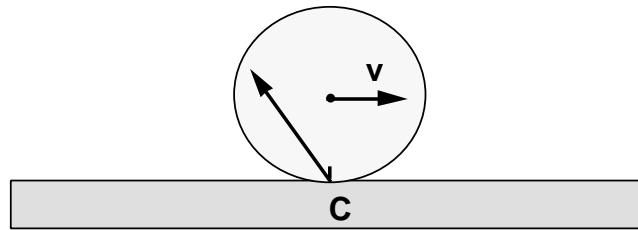


Figura PM. 10: vincolo di puro rotolamento

L'unico punto in cui il vincolo può interagire con il disco è il punto di contatto C tra il disco e la curva; dunque la reazione vincolare deve essere applicata al punto del corpo rigido che si trova a coincidere istante per istante con C . Il lavoro vale allora:

$$\delta L^{(v)} = \boldsymbol{\Phi} \times \delta C = 0$$

ed è nullo in quanto il punto C è un centro di istantanea rotazione. Infatti lo spostamento del punto del corpo rigido che nell'istante considerato si trova a coincidere con C (spostamento di trascinamento), ovvero lo spostamento del punto C pensato istante per istante come punto appartenente al corpo rigido, risulta essere nullo.

In questo caso l'attrito è presente, ma non compie lavoro e non dissipa quindi energia.

Chiaramente anche in questo caso lo schema adottato è una idealizzazione della realtà: infatti se fosse vero che l'attrito pur essendo presente non dissipa energia, perchè non compie lavoro, il disco dovrebbe continuare a muoversi indefinitamente lungo la curva, senza arrestarsi. Questo non succede (e non succederebbe anche in assenza di resistenza dell'aria al moto del disco e in assenza di piccole deformazioni che riscaldano il disco a spese di energia meccanica) perchè nella realtà l'appoggio non avviene in un punto geometrico, ma in una piccola area di contatto e quindi le reazioni vincolari non sono riducibili a un solo vettore applicato, ma ad un vettore e a una coppia il cui momento compie lavoro. La presenza di questo momento addizionale è responsabile del cosiddetto *attrito volvente* che rallenta il moto del disco fino ad arrestarlo.

Unicità della soluzione

Per concludere questo capitolo sui principi della meccanica dobbiamo svolgere qualche considerazione di carattere analitico sull'equazione fondamentale della dinamica (PM.1), nella quale conglobiamo, in questo momento, con l'unico termine \mathbf{F} tutte le forze agenti sul punto.

Essa rappresenta un sistema di equazioni differenziali per le funzioni incognite $OP(t)$. Assegnando le condizioni iniziali, cioè la posizione e la velocità del punto mobile P all'istante iniziale $t = 0$, dal punto di vista fisico, cioè sperimentalmente, si ha sempre uno e un solo moto in corrispondenza della forza assegnata. Dal punto di vista matematico questo significa che il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} m \ddot{P} = \mathbf{F}(P, \dot{P}, t) \\ OP(0) = OP_0, & \dot{P}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

avendo denotato con il punto la derivata temporale, deve ammettere una e una sola soluzione, per risultare ben posto. Com'è noto la condizione analitica

affinchè il *teorema di unicità della soluzione* sia valido è che la funzione $F(P, \dot{P}, t)$ sia lipschitziana rispetto a P, \dot{P} .

Ricordiamo che una funzione

$$f : A \longrightarrow R^m, \quad A \subseteq R^n$$

si dice lipschitziana se esiste un $C \in R^+$ tale che:

$$\|f(x') - f(x'')\| \leq C \|x' - x''\|, \quad \forall x', x'' \in A$$

Quando la funzione f è differenziabile questa condizione equivale alla limitatezza delle sue derivate parziali.

Per le forze che fisicamente si conoscono in natura tale condizione risulta sempre verificata.

A titolo di esempio immaginiamo una forza non fisica, che non sia lipschitziana, del tipo:

$$F(x) = k\sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

Chiaramente la condizione di Lipschitz non può valere perchè la derivata della F non è limitata per $x \rightarrow 0$. Di conseguenza manca l'unicità della soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = k\sqrt{x} \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Infatti una soluzione è:

$$x(t) = 0$$

ed è la soluzione che ha senso fisico, in quanto nell'origine la forza è nulla e il punto, inizialmente fermo nell'origine e sottoposto a forza nulla, rimane indefinitamente fermo. Ma esiste anche la soluzione:

$$x(t) = \left(\frac{k}{12m} \right)^2 t^4$$

che non ha alcun significato fisico.

