

MI. Momenti d'inerzia

Consideriamo un sistema particellare di n punti materiali:

$$\{(P_s, m_s), s = 1, 2, \dots, n\}$$

e una retta r nello spazio; indicata con δ_s la distanza del generico punto P_s dalla retta r , si definisce *momento d'inerzia* rispetto alla retta r , del sistema di masse considerato, lo *scalare*:

$$\mathcal{J}_r = \sum_{s=1}^n m_s \delta_s^2 \quad (\text{MI.1})$$

Il *momento d'inerzia* è uno *scalare* e, perciò è invariante rispetto alle rotazioni e traslazioni degli assi, dipendendo solamente dalle masse e dalle distanze dei punti da una retta, che sono quantità invarianti rispetto alle predette trasformazioni dei sistemi di coordinate. Esso può variare nel tempo solo se mutano le distanze o ci sono variazioni di massa.

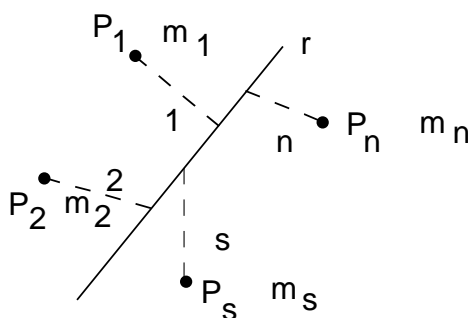


Figura MI. 1: momento d'inerzia rispetto a una retta per un sistema discreto

Se il corpo è continuo la definizione precedente viene estesa in modo naturale e si ha:

$$\mathcal{J}_r = \int_C \delta^2 dm \quad (\text{MI.2})$$

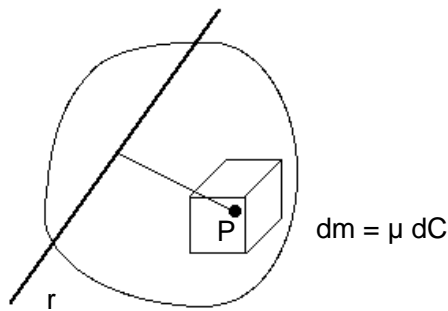


Figura MI. 2: momento d'inerzia rispetto a una retta per un sistema continuo

da cui introducendo la densità:

$$\mathcal{J}_r = \int_C \mu \delta^2 dC \quad (\text{MI.3})$$

essendo δ e μ funzioni delle coordinate del punto variabile P nel quale è centrato l'elemento dC .

- Il momento d'inerzia dipende dalla retta rispetto alla quale viene calcolato.

Ciò comporta, che per esempio, per un continuo bisogna calcolare un'integrale per il momento d'inerzia relativo ad ogni retta alla quale si è interessati in un certo problema meccanico. Per ridurre al minimo il numero degli integrali da calcolare ci si può servire di due metodologie:

— la prima permette di collegare fra loro i valori dei momenti d'inerzia relativi a rette fra loro parallele, nota l'ubicazione del baricentro del sistema;

— la seconda permette, invece di collegare fra loro i valori dei momenti d'inerzia relativi a rette che escono tutte da uno stesso punto, quindi in direzioni differenti. Ora le vediamo entrambe.

Teorema di Huygens-Steiner

Questo teorema costituisce la base della prima metodologia, che permette di collegare fra loro i momenti d'inerzia relativi a rette parallele una volta che sia nota l'ubicazione del baricentro. Lo enunciamo e lo dimostriamo:

Dato un sistema di punti materiali la cui massa totale è m , il momento d'inerzia \mathcal{J} rispetto ad una retta r , è correlato al momento d'inerzia \mathcal{J}_G rispetto ad una retta r_G , passante per il baricentro, parallela alla r , e distante d da essa, mediante la relazione:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_G + m d^2 \quad (\text{MI.4})$$

DIMOSTRAZIONE

Conduciamo la dimostrazione per un corpo discreto, dal momento che il caso continuo si tratta in maniera del tutto analoga.

Per la definizione di momento d'inerzia (MI.1) abbiamo:

$$\mathcal{J} = \sum_{s=1}^n m_s \delta_s^2$$

e:

$$\mathcal{J}_G = \sum_{s=1}^n m_s \delta'_s{}^2$$

dove con δ'_s abbiamo indicato la distanza del punto P_s dalla retta r_G .

Scegliamo due sistemi di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ come in figura (MI. 3), con l'asse y in comune, gli assi z e rispettivamente z' che coincidano con le rette r ed r_G . Il baricentro si troverà allora sull'asse z' e può anche essere scelto come origine degli assi (anche se ciò non è necessario).

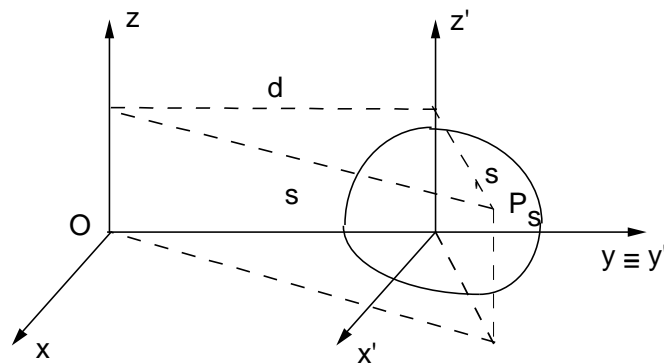


Figura MI. 3: teorema di Huygens-Steiner: scelta degli assi

Rispetto a questi sistemi di assi le distanze al quadrato dei singoli punti del sistema dalle rette $r \equiv z$ e $r_G \equiv z'$ sono espresse in termini delle coordinate come:

$$\delta_s^2 = x_s^2 + y_s^2, \quad \delta'_s{}^2 = x'_s{}^2 + y'_s{}^2$$

essendo le quantità con l'apice riferite al sistema il cui terzo asse contiene il baricentro.

Per passare da un sistema di coordinate all'altro occorre compiere la traslazione:

$$x = x', \quad y = y' + d, \quad z = z'$$

che sostituita nell'espressione di δ_s^2 comporta il legame:

$$\delta_s^2 = x_s^2 + y_s^2 = x_s'^2 + (y_s' + d)^2 = x_s'^2 + y_s'^2 + d^2 + 2y_s'd$$

Ovvero:

$$\delta_s^2 = \delta_s'^2 + d^2 + 2y_s'd \quad (\text{MI.5})$$

Sostituendo la (MI.5) nella espressione del momento d'inerzia \mathcal{J} otteniamo:

$$\mathcal{J} = \sum_{s=1}^n m_s (\delta_s'^2 + d^2 + 2y_s'd) = \sum_{s=1}^n m_s \delta_s'^2 + \sum_{s=1}^n m_s d^2 + 2 \sum_{s=1}^n m_s y_s' d$$

dalla quale arriviamo a:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_G + md^2 + 2d \sum_{s=1}^n m_s y_s'$$

Ma l'ultimo termine nella relazione precedente è nullo in quanto il baricentro si trova sull'asse $z' \equiv r_G$ e quindi:

$$\sum_{s=1}^n m_s y_s' = m y_G' = 0$$

Rimane dunque:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_G + md^2$$

Come conseguenza di questo teorema è possibile legare anche i momenti d'inerzia \mathcal{J}' e \mathcal{J}'' di un sistema di punti materiali calcolati rispetto a due rette parallele r' e r'' delle quali nessuna passa per il baricentro. Si considera una terza retta r_G parallela alle prime due, ma passante per il baricentro e si applica due volte il teorema di Huygens-Steiner.

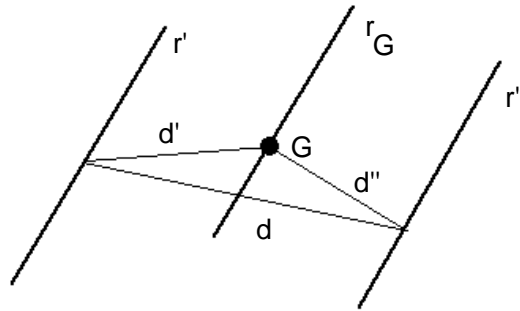


Figura MI. 4: rette parallele r' e r'' non passanti per il baricentro e r_G passante per il baricentro

Abbiamo:

$$\mathcal{J}'' = \mathcal{J}_G + md''^2$$

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}_G + md'^2$$

dove d' e d'' sono le distanze del baricentro dalle rette r' e r'' . Sottraendo membro a membro le relazioni precedenti ricaviamo il legame cercato fra \mathcal{J}' e \mathcal{J}'' :

$$\mathcal{J}'' = \mathcal{J}' + m(d''^2 - d'^2) \quad (\text{MI.6})$$

Notiamo che non compare il quadrato della distanza fra le due rette r' e r'' , ma la differenza dei quadrati delle loro distanze dal baricentro. Ora il legame fra i quadrati delle distanze, non essendo lineare, ma quadratico, richiede la conoscenza delle distanze fra le rette r' e r'' che non passano per il baricentro e la retta r_G passante per il baricentro; e quindi l'informazione sulla localizzazione del baricentro influisce sulla determinazione dei momenti d'inerzia rispetto a rette fra loro parallele.

In realtà c'è un caso in cui sussiste la relazione pitagorica:

$$d^2 = d''^2 - d'^2$$

dove d indica la distanza fra le rette r' ed r'' , ed è il caso in cui le tre rette r' , r'' e r_G sono rette generatrici di una superficie cilindrica la cui sezione retta è circolare e ha diametro d'' e le rette r_G ed r'' appartengono a un piano passante per l'asse del cilindro.

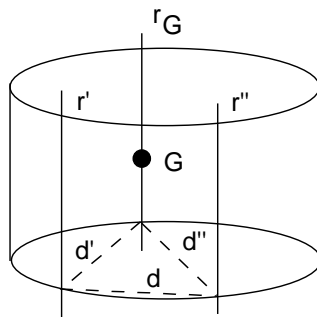


Figura MI. 5: caso in cui le rette r' , r'' e r_G sono generatrici di un cilindro circolare retto

In questo caso è legittimo scrivere:

$$\mathcal{J}'' = \mathcal{J}' + md^2$$

e il baricentro non figura direttamente; tuttavia la sua ubicazione è nota a causa delle condizioni geometriche ben precise che sono state assegnate.

Matrice d'inerzia

Visto il legame fra i momenti d'inerzia rispetto ad assi paralleli fra loro, viene naturale chiedersi come si può determinare un legame fra i momenti d'inerzia relativi a rette uscenti da uno stesso punto, aventi direzioni fra loro differenti. In altri termini ci domandiamo come varia il momento d'inerzia al variare del versore \mathbf{u} di una retta uscente dall'origine O di un sistema cartesiano scelto arbitrariamente. La risposta a questa domanda ci conduce alla seconda metodologia per il calcolo dei momenti d'inerzia di un corpo rispetto ad una retta, con il minimo numero di integrali possibile.

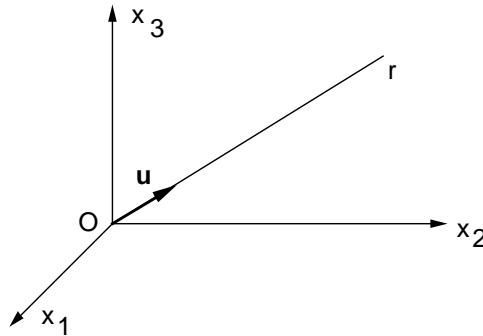


Figura MI. 6: retta di direzione variabile uscente dall'origine

Vogliamo calcolare il momento d'inerzia di un corpo rispetto alla retta r , uscente da O in funzione del versore \mathbf{u} della retta. Questa volta conduciamo

i calcoli per un corpo continuo, anche perchè, in questo modo, evitiamo gli indici relativi alla numerazione dei punti del sistema.

Per la definizione di momento d'inerzia (MI.3) abbiamo:

$$\mathcal{J} = \int_C \mu \delta^2 dC$$

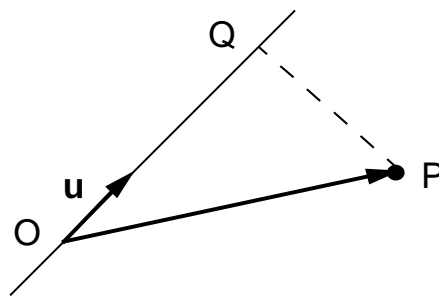


Figura MI. 7: determinazione della distanza del punto P dalla retta r

Ora la distanza δ del generico punto P del corpo dalla retta r di direzione \mathbf{u} si può determinare mediante la relazione pitagorica:

$$\delta^2 = (OP)^2 - (OQ)^2 = (OP)^2 - (OP \times \mathbf{u})^2 \quad (\text{MI.7})$$

essendo Q la proiezione di P su r . Possiamo mettere in evidenza il versore \mathbf{u} che non dipende dal punto P , ma solamente dalla retta; infatti:

$$OP \times \mathbf{u} = x_i u_i$$

avendo denotato con:

$$OP \equiv (x_i), \quad \mathbf{u} \equiv (u_i)$$

le rispettive componenti dei vettori rispetto agli assi cartesiani. Ma allora possiamo scrivere:

$$(OP \times \mathbf{u})^2 = (x_i u_i)(x_k u_k) = u_i [(x_i x_k) u_k]$$

Ora ricordiamo che per definizione di prodotto tensoriale si ha:

$$OP \otimes OP = \|(x_i x_k)\|$$

Dunque possiamo scrivere:

$$(OP \times \mathbf{u})^2 = \mathbf{u} \times [(OP \otimes OP)\mathbf{u}] \quad (\text{MI.8})$$

Le parentesi quadre sono di per sè superflue e si possono omettere: sono state introdotte solamente per visualizzare meglio l'azione della matrice $OP \otimes OP$ sul vettore \mathbf{u} e il fatto che il vettore trasformato $(OP \otimes OP)\mathbf{u}$ viene poi moltiplicato scalarmente per il vettore \mathbf{u} .

Notiamo che possiamo anche scrivere il primo termine della (MI.7) come:

$$(OP)^2 = (OP)^2 \mathbf{u}^2 = (OP)^2 \mathbf{u} \times (\underline{J} \mathbf{u}) \quad (\text{MI.9})$$

avendo tenuto conto del fatto che:

$$\mathbf{u}^2 = 1$$

trattandosi di un versore. Sostituendo i risultati (MI.8) e (MI.9) nella (MI.7) otteniamo finalmente:

$$\delta^2 = \mathbf{u} \times [(OP)^2 \underline{I} - OP \otimes OP] \mathbf{u} \quad (\text{MI.10})$$

Questa informazione, sostituita nell'integrale del momento d'inerzia ci dà:

$$\mathcal{J} = \int_C \mu \mathbf{u} \times [(OP)^2 \underline{I} - OP \otimes OP] \mathbf{u} dC$$

Dal momento che \mathbf{u} non dipende dal punto P , ma solo dalla direzione della retta r che non varia durante l'integrazione, possiamo portarlo fuori dal segno di integrale, ottenendo:

$$\mathcal{J} = \mathbf{u} \times \left\{ \int_C \mu [(OP)^2 \underline{I} - OP \otimes OP] dC \right\} \mathbf{u} \quad (\text{MI.11})$$

Si chiama *matrice d'inerzia* la matrice:

$$\underline{\mathcal{J}} = \int_C \mu [(OP)^2 \underline{I} - OP \otimes OP] dC \quad (\text{MI.12})$$

che non dipende dalla direzione \mathbf{u} della retta, ma solamente dalla distribuzione della massa nel corpo. Avendo introdotto la matrice d'inerzia, il momento d'inerzia rispetto ad assi concorrenti in uno stesso punto, in funzione della loro direzione \mathbf{u} si esprime mediante la *forma quadratica*:

$$\mathcal{J} = \mathbf{u} \times \underline{\mathcal{J}} \mathbf{u} \quad (\text{MI.13})$$

La matrice d'inerzia gode delle seguenti due proprietà:

— è *simmetrica*: infatti in base alla sua definizione è immediato verificare che $\underline{\mathcal{J}}^T = \underline{\mathcal{J}}$

— è *definita positiva*: ricordiamo che una matrice \underline{A} si dice definita positiva se e solo se:

$$\begin{cases} \mathbf{v} \times \underline{\underline{A}} \mathbf{v} > 0 & \forall \mathbf{v} \neq 0 \\ \mathbf{v} \times \underline{\underline{A}} \mathbf{v} = 0 & \iff \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che se, in queste relazioni, introduciamo il versore \mathbf{u} del vettore \mathbf{v} , risulta:

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \mathbf{u}$$

E dunque:

$$\mathbf{v} \times \underline{\underline{A}} \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \mathbf{u} \times \underline{\underline{A}} \mathbf{u} \quad (\text{MI.14})$$

Dire che la matrice $\underline{\underline{A}}$ è definita positiva allora equivale a dire che:

$$\mathbf{u} \times \underline{\underline{A}} \mathbf{u} > 0, \quad \forall \mathbf{u}$$

perchè essendo \mathbf{u} un versore non è mai nullo; e la forma quadratica (MI.14) risulta nulla se e solo se $|\mathbf{v}| = 0$ cioè se e solo se \mathbf{v} è nullo.

Allora possiamo concludere che la matrice d'inerzia è definita positiva in quanto il momento d'inerzia è per definizione un numero positivo. Fanno eccezione i casi degeneri in cui la massa del sistema è concentrata lungo una retta (oppure è nulla). In questi casi eccezionali la matrice d'inerzia risulta essere *semidefinita positiva* (o rispettivamente nulla).

Rappresentiamo la matrice d'inerzia sugli assi cartesiani calcolando i suoi elementi di matrice:

$$\sigma_{ik} = \int_{\mathcal{C}} \mu (x_j x_j \delta_{ik} - x_i x_k) dC \quad (\text{MI.15})$$

Di qui ricaviamo gli elementi della diagonale principale, che solitamente vengono denotati con le lettere A , B , C :

$$A = \sigma_{11} = \int_C \mu(x_2^2 + x_3^2) dC = \int_C \mu(y^2 + z^2) dC \quad (\text{MI.16})$$

$$B = \sigma_{22} = \int_C \mu(x_1^2 + x_3^2) dC = \int_C \mu(x^2 + z^2) dC \quad (\text{MI.17})$$

$$C = \sigma_{33} = \int_C \mu(x_1^2 + x_2^2) dC = \int_C \mu(x^2 + y^2) dC \quad (\text{MI.18})$$

• Osservando queste relazioni si conclude che gli elementi della diagonale principale della matrice d'inerzia sono i momenti d'inerzia calcolati rispetto agli assi cartesiani.

Calcoliamo ora gli elementi che hanno indici fra loro diversi e che si denotano nel modo seguente, in modo da eliminare i segni negativi che compaiono nel calcolo:

$$A' = -\sigma_{23} = -\sigma_{32} = \int_C \mu x_2 x_3 dC = \int_C \mu y z dC \quad (\text{MI.19})$$

$$B' = -\sigma_{13} = -\sigma_{31} = \int_C \mu x_1 x_3 dC = \int_C \mu x z dC \quad (\text{MI.20})$$

$$C' = -\sigma_{12} = -\sigma_{21} = \int_C \mu x_1 x_2 dC = \int_C \mu x y dC \quad (\text{MI.21})$$

Le quantità A' , B' , C' pur avendo le dimensioni di momenti d'inerzia non appaiono avere un significato immediatamente leggibile; essi tuttavia sono responsabili dei fenomeni di deviazione dall'asse di rotazione che esamineremo nella dinamica del corpo rigido. Prendono perciò il nome di *momenti di deviazione* o *momenti centrifughi*.

Con queste notazioni la matrice d'inerzia si rappresenta mediante la tabella:

$$\mathcal{I} \equiv \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \quad (\text{MI.22})$$

Anche le componenti del versore \mathbf{u} solitamente vengono denotate in maniera particolare: si scrivono cioè come:

$$\mathbf{u} \equiv (\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{MI.23})$$

e rappresentano i *coseni direttori* della retta variabile r rispetto agli assi cartesiani. Con queste notazioni la forma quadratica del momento d'inerzia (MI.13) si scrive in maniera estesa come:

$$\mathcal{J} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2C'\alpha\beta \quad (\text{MI.24})$$

- Sottolineiamo, infine, il fatto che la matrice d'inerzia dipende dalla scelta del punto O centro della stella di rette di direzione variabile \mathbf{u} e concorrenti in O . Di conseguenza per lo stesso corpo esistono tante matrici d'inerzia quanti sono i punti dello spazio, che possono essere scelti come origine a cui riferire la matrice. Esistono, perciò ∞^3 matrici d'inerzia per ogni corpo. Di conseguenza, dove possano sorgere ambiguità conviene denotare con \mathcal{I}_O la matrice d'inerzia di un corpo riferita al centro O .

Assi principali d'inerzia

La matrice d'inerzia, essendo simmetrica, è sicuramente *diagonalizzabile* e possiede autovalori reali e una base ortonormale di autovettori; in più, essendo anche definita positiva i suoi autovalori sono positivi.

Possiamo, perciò introdurre la seguente definizione di *asse principale d'inerzia*:

Si dice asse principale d'inerzia, relativo ad una matrice $\underline{\sigma}$ una retta, passante per O , che ha la direzione di un autovettore di $\underline{\sigma}$

Per una matrice simmetrica i cui autovalori sono distinti gli assi principali sono tre e sono fra loro ortogonali. Se la matrice possiede autovalori multipli (cioè non tutti distinti) gli assi principali sono infiniti in quanto in corrispondenza di un autovalore doppio esiste un piano invariante rispetto all'azione della matrice. Se addirittura tutti e tre gli autovalori sono coincidenti tutto lo spazio R^3 risulta invariante.

- Se si riferisce la matrice d'inerzia ad un sistema cartesiano i cui assi sono assi principali d'inerzia la matrice assume forma diagonale e i momenti di deviazione risultano essere nulli. In questo caso i momenti A , B e C relativi agli assi cartesiani prendono il nome di *momenti principali d'inerzia*.

In questo caso la forma quadratica che permette di calcolare il momento d'inerzia relativo ad una retta passante per O , di coseni direttori α, β, γ si semplifica notevolmente, riducendosi a:

$$\mathcal{J} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \quad (\text{MI.25})$$

Ellissoide d'inerzia

E' noto dalla geometria (si possono vedere a questo proposito alcuni richiami nell'appendice *AL - Algebra vettoriale e matriciale*) che ad ogni matrice simmetrica può essere associata una quadrica e, quando la matrice è *definita positiva* la quadrica, il cui centro coincide con l'origine degli assi ai quali si riferisce la matrice, è un ellissoide. Indicando con \underline{A} la matrice e con

\boldsymbol{x} il vettore che identifica il generico punto della quadrica, l'equazione della quadrica si esprime nella forma:

$$\boldsymbol{x} \times \underline{\mathcal{A}} \boldsymbol{x} = 1 \quad (\text{MI.26})$$

La nostra matrice d'inerzia $\underline{\mathcal{J}}$ è simmetrica e definita positiva, dunque ad essa possiamo associare un ellissoide di equazione:

$$\boxed{\boldsymbol{x} \times \underline{\mathcal{J}} \boldsymbol{x} = 1} \quad (\text{MI.27})$$

che prende il nome di *ellissoide d'inerzia*.

Ma abbiamo visto che il momento d'inerzia rispetto ad assi concorrenti in O è dato dalla relazione (MI.13), che possiamo riscrivere in una forma che ora ci è utile per un confronto con la (MI.27):

$$\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\mathcal{J}}} \times \underline{\mathcal{J}} \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\mathcal{J}}} = 1 \quad (\text{MI.28})$$

Evidentemente la (MI.27) e la (MI.28) devono identificarsi e questo comporta che:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\mathcal{J}}} \quad (\text{MI.29})$$

Questa relazione definisce l'ellissoide d'inerzia come *il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza dall'origine O , al variare della retta r di versore \boldsymbol{u} è data da:*

$$|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}}} \quad (\text{MI.30})$$

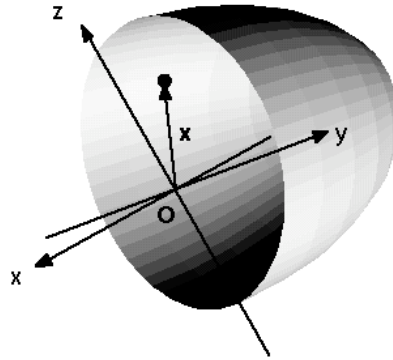


Figura MI. 8: ellissoide d'inerzia

Anche da questa condizione si vede subito, senza bisogno di analizzare le proprietà della matrice, che la quadrica in questione è un ellissoide, dal momento che, essendo il momento d'inerzia sempre positivo (a parte i casi degeneri) risulta sempre:

$$|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}}} < +\infty$$

e quindi tutti i punti della quadrica si trovano a una distanza finita dall'origine O , cioè sono racchiudibili entro una regione limitata dello spazio, ovvero la quadrica non possiede punti impropri. Ma l'unica quadrica che non ha punti impropri ed è quindi racchiudibile in una regione limitata dello spazio è l'ellissoide.

La relazione (MI.30) ha anche un'utilizzazione per la determinazione grafica del momento d'inerzia: infatti, noto l'ellissoide d'inerzia di un corpo è possibile rappresentare su un foglio di carta la sua sezione con un piano al quale appartiene una retta rispetto alla quale si vuole conoscere il momento d'inerzia (ellisse d'inerzia). Allora è sufficiente misurare la distanza $|\boldsymbol{x}|$, riportarla nella scala in cui è stato fatto il grafico per ottenere il momento d'inerzia:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$$

Scritta per esteso l'equazione dell'ellissoide d'inerzia, si ottiene sviluppando la (MI.27) ed è data dalla seguente relazione:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'yz - 2B'xz - 2C'xy = 1 \quad (\text{MI.31})$$

Nel caso in cui gli assi cartesiani siano assi principali d'inerzia, come abbiamo visto, la matrice d'inerzia diviene diagonale, annullandosi i momenti di deviazione. Allora l'equazione dell'ellissoide d'inerzia assume la *forma canonica*:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad \iff \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{MI.32})$$

dove i semiassi dell'ellissoide sono correlati ai momenti principali d'inerzia dalle relazioni:

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad b = \frac{1}{\sqrt{B}} \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

Gli assi principali d'inerzia, che abbiamo precedentemente definito in relazione alla matrice \mathcal{J} , allora vengono a coincidere con gli assi di simmetria dell'ellissoide d'inerzia, in quanto, riferita a questi assi l'equazione dell'ellissoide assume forma canonica.

Osserviamo che se uno dei momenti principali d'inerzia viene fatto tendere a zero (il che equivale a ad avere tutta la massa giacente sull'asse cartesiano di indice corrispondente a quel momento) il semiasse dell'ellissoide corrispondente tende all'infinito e l'equazione dell'ellissoide tende all'equazione di un cilindro: ci troviamo in un caso degenerare in cui

la matrice d'inerzia non è più definita positiva ma solamente semidefinita positiva. Per esempio, poniamo che $C \rightarrow 0$: allora ne consegue che il semiasse $c \rightarrow +\infty$ e l'equazione dell'ellissoide diventa:

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

- Notiamo ancora che, essendo associati alle matrici d'inerzia, gli ellipsoidi d'inerzia sono infiniti, tanti quante sono le matrici d'inerzia, e cioè tanti quanti sono i punti dello spazio che si possono scegliere come centri dell'ellissoide.

- In particolare si dice *ellissoide centrale d'inerzia* l'ellissoide d'inerzia il cui centro coincide con il baricentro del corpo.

Concludiamo questa sezione dando le definizioni di *corpo a struttura giroscopica* e di *giroscopio*:

Un corpo si dice a struttura giroscopica rispetto ad un punto O quando il suo ellissoide d'inerzia di centro O è un ellissoide di rivoluzione (ellissoide rotondo)

Un corpo si dice giroscopio quando ha struttura giroscopica rispetto al suo baricentro, cioè quando il suo ellissoide centrale d'inerzia è rotondo. L'asse di rivoluzione dell'ellissoide si dice asse giroscopico

Ricerca degli assi principali d'inerzia

Come si è visto la conoscenza degli assi principali d'inerzia è particolarmente vantaggiosa perchè consente di rappresentare la matrice d'inerzia mediante tre soli elementi non nulli, anzichè i sei che si hanno rispetto ad assi cartesiani qualunque. Ciò significa, praticamente, tre integrali

da calcolare invece di sei. Perciò è conveniente, quando è possibile, riferire la matrice agli assi principali d'inerzia.

Anche nel caso che si conosca un solo asse principale d'inerzia, se lo si fa coincidere con uno degli assi cartesiani, la matrice, pur non risultando diagonale, viene semplificata. Supponiamo, infatti, di far coincidere l'asse principale con l'asse z : allora il versore e_3 viene ad essere un autovettore della matrice. Perciò possiamo scrivere:

$$\mathcal{L} e_3 = \lambda e_3$$

Ovvero:

$$\begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo le informazioni:

$$\lambda = C, \quad A' = 0, \quad B' = 0$$

La conoscenza di un solo asse principale d'inerzia permette di eliminare due momenti di deviazione. Viceversa se si annullano due momenti di deviazione rimane identificato un autovettore della matrice e quindi un asse principale d'inerzia.

Ciò comporta che se si conoscono due assi principali d'inerzia e si scelgono come assi cartesiani, si eliminano tutti e tre i momenti di deviazione; questo non fa meraviglia, perchè la conoscenza di due assi principali comporta la conoscenza anche del terzo, che è ortogonale ai primi due, in conseguenza della simmetria della matrice. Allora scegliere due assi principali d'inerzia come assi cartesiani equivale a riferire la matrice ai tre assi principali, perciò la matrice risulta diagonalizzata.

• La ricerca degli assi principali d'inerzia si può effettuare, sempre, diagonalizzando la matrice \mathcal{I} , tuttavia, quando il corpo possiede particolari simmetrie di massa, la diagonalizzazione può essere evitata. Enunciamo e dimostriamo i seguenti criteri, che rappresentano delle condizioni *sufficienti* per la determinazione degli assi principali:

— se il corpo possiede un piano di simmetria di massa, allora ogni retta ortogonale a questo piano è un asse principale d'inerzia per l'ellissoide che ha centro nel punto di intersezione della retta con il piano.

Infatti, scelto un sistema di assi cartesiani, i cui assi x e y appartengono al piano di simmetria, e z è quindi ortogonale al piano, per definizione di piano di simmetria di massa, è possibile suddividere il corpo in coppie di punti di ugual massa aventi quote opposte.

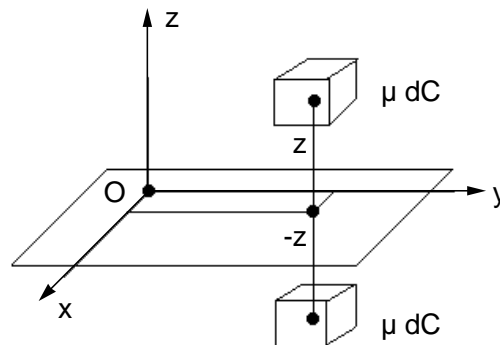


Figura MI. 9: corpo dotato di un piano di simmetria di massa

Ne consegue che possiamo dividere il dominio di integrazione \mathcal{C} in due domini simmetrici \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 in ciascuno dei quali la funzione integranda assume valori opposti punto per punto. Cioè possiamo scrivere:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset, \quad \mathcal{C}_2 = \{(x, y, -z); (x, y, z) \in \mathcal{C}_1\}$$

Ne consegue che:

$$A' = \int_{C_1 \cup C_2} \mu y z dC = \int_{C_1} \mu y z dC + \int_{C_2} \mu y z dC = \int_{C_1} \mu y z dC - \int_{C_1} \mu y z dC = 0$$

e analogamente:

$$B' = 0$$

Dunque l'asse z è un asse principale d'inerzia per l'ellissoide di centro O e quindi per la matrice d'inerzia che lo definisce.

— *Se il corpo possiede due piani di simmetria fra loro ortogonali restano individuati tutti e tre gli assi principali d'inerzia di ogni ellissoide che ha il centro sulla retta di intersezione dei due piani.*

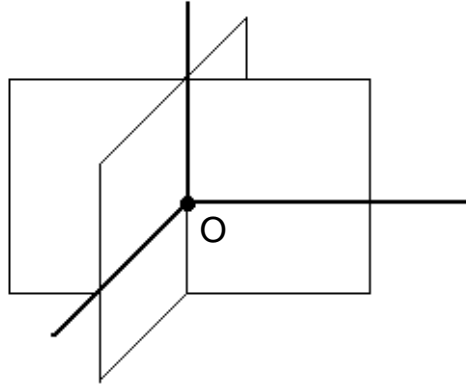


Figura MI. 10: corpo dotato di due piani di simmetria di massa ortogonali

Infatti applicando due volte il primo criterio si individuano due assi principali d'inerzia ortogonali fra loro, coincidenti con le normali ai piani di simmetria condotte per il punto O appartenente alla retta di intersezione dei due piani. Il terzo asse principale d'inerzia è la retta per O , normale ai

due assi principali individuati, e coincide con la retta di intersezione dei due piani.

— *Se un corpo possiede due piani di simmetria fra loro non ortogonali, allora il corpo ha struttura giroscopica rispetto a tutti i punti della retta di intersezione dei due piani e in particolare risulta essere un giroscopio.*

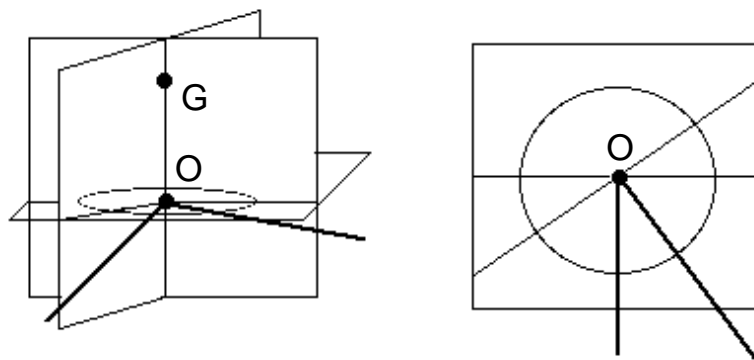


Figura MI. 11: corpo dotato di due piani di simmetria di massa non ortogonali

Applicando il primo criterio a ciascuno dei due piani si individuano per ogni ellissoide il cui centro O appartiene alla loro retta di intersezione, due assi principali d'inerzia non ortogonali. Ora la sezione dell'ellissoide d'inerzia con un piano ortogonale ai due piani di simmetria, passante per O , è un'ellisse, che viene ad avere due assi di simmetria non ortogonali. Ma l'unica ellisse che ha assi di simmetria non ortogonali è la circonferenza. Di conseguenza l'ellissoide di centro O è un ellissoide di rivoluzione attorno alla retta di intersezione dei due piani. Allora si può concludere che qualunque sia il punto O sulla retta di intersezione l'ellissoide che ha centro in O è rotondo e quindi il corpo ha struttura giroscopica rispetto ad O .

D'altra parte sappiamo che se esiste un piano di simmetria di massa (che è un caso particolare di piano diametrale) il baricentro si trova sul piano di simmetria: nel nostro caso esistono due piani di simmetria di massa, di conseguenza il baricentro si trova sulla loro retta di intersezione. Ma abbiamo visto che il corpo ha struttura giroscopica rispetto a tutti i punti di questa retta,

quindi l'avrà anche rispetto al baricentro. Dunque il corpo è un giroscopio e la retta d'intersezione è l'asse giroscopico.

Figure piane

- Quando il corpo è schematizzato con una figura piana ogni retta normale al piano della figura risulta essere un asse principale d'inerzia per l'ellissoide che ha centro nell'intersezione della retta con il piano.

Infatti: scelto il riferimento cartesiano in modo che gli assi x e y appartengano al piano e l'asse z sia, quindi, ortogonale al piano, ne consegue che tutti i punti hanno quota nulla, e quindi risulta:

$$A' = \int_C \mu y z dC = 0, \quad B' = \int_C \mu x z dC = 0$$

e l'unico momento di deviazione, in generale non nullo, è C' .

Si hanno inoltre le seguenti conseguenze per le espressioni dei momenti rispetto agli assi:

$$A = \int_C \mu y^2 dC, \quad B = \int_C \mu x^2 dC, \quad C = \int_C \mu (x^2 + y^2) dC$$

- Di conseguenza per una figura piana sussiste il legame:

$$C = A + B$$

(MI.33)

e la matrice d'inerzia è individuata da soli tre elementi:

$$\begin{pmatrix} A & -C' & 0 \\ -C' & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix} \quad (\text{MI.34})$$

che si riducono a due se ci si riferisce ad assi x e y principali d'inerzia.

Traslazione degli assi

Può rendersi necessario, nelle applicazioni, disporre di un legame tra le matrici d'inerzia relative a sistemi di assi cartesiani differenti. Un primo problema si pone quando si effettua una traslazione degli assi cartesiani, per cui si cambia l'origine delle rette concorrenti rispetto alle quali le matrici d'inerzia servono ad esprimere il momento d'inerzia. Esprimiamo la traslazione delle coordinate come:

$$x_i = \hat{x}_i + d_i \quad \iff \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}$$

dove si sono marcate con un $\hat{}$ le coordinate relative ad uno dei due sistemi di assi.

Allora avremo per definizione di matrice d'inerzia, per esempio, per un sistema materiale continuo:

$$\sigma_{ik} = \int_C \mu(x_j x_j \delta_{ik} - x_i x_k) dC$$

$$\hat{\sigma}_{ik} = \int_{\hat{C}} \mu(\hat{x}_j \hat{x}_j \delta_{ik} - \hat{x}_i \hat{x}_k) d\hat{C}$$

Notiamo che la traslazione non cambia gli elementi di volume dal momento che i parametri di traslazione d_i sono indipendenti dalle coordinate e quindi:

$$\int_{\hat{C}} f(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{C} = \int_C f(\mathbf{x}) dC$$

per ogni funzione f integrabile sul dominio C .

Per cui possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \int_C \mu(x_j x_j \delta_{ik} - x_i x_k) dC = \\ &= \int_C \mu [(\hat{x}_j + d_j)(\hat{x}_j + d_j) \delta_{ik} - (\hat{x}_i + d_i)(\hat{x}_k + d_k)] dC \end{aligned}$$

Sviluppando e tenendo conto che per definizione di baricentro si ha:

$$m \hat{x}_{Gi} = \int_C \mu \hat{x}_i dC$$

otteniamo la relazione tra le matrici d'inerzia relative a centri diversi O e \hat{O} , origini dei sistemi di assi traslati:

$$\sigma_{ik} = \hat{\sigma}_{ik} + m [(d_j d_j + 2d_j \hat{x}_{Gj}) \delta_{ik} - d_i d_k - d_i \hat{x}_{Gk} - \hat{x}_{Gi} d_k] \quad (\text{MI.35})$$

In particolare se l'origine \hat{O} coincide con il baricentro G del sistema materiale le coordinate del baricentro risultano nulle:

$$\hat{x}_{Gi} = 0$$

e quindi si ha la relazione più semplice:

$$\sigma_{ik} = \hat{\sigma}_{ik} + m (d_j d_j \delta_{ik} - d_i d_k) \quad (\text{MI.36})$$

In forma simbolica abbiamo la relazione tra gli operatori d'inerzia:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_G + m(\mathbf{d}^2 \mathcal{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \quad (\text{MI.37})$$

dove:

$$\mathcal{I}_G \equiv \|\hat{\sigma}_{ik}\|$$

Gli elementi di matrice risultano allora legati dalle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} A &= A_G + m(d_2^2 + d_3^2) \\ B &= B_G + m(d_1^2 + d_3^2) \\ C &= C_G + m(d_1^2 + d_2^2) \end{aligned} \quad (\text{MI.38})$$

per quanto riguarda i momenti relativi agli assi. Questo risultato è evidentemente una conseguenza del teorema di Huygens-Steiner. Per i momenti di deviazione abbiamo:

$$\begin{aligned} A' &= A'_G + m d_2 d_3 \\ B' &= B'_G + m d_1 d_3 \\ C' &= C'_G + m d_1 d_2 \end{aligned} \quad (\text{MI.39})$$

- Osserviamo dunque che se gli assi aventi origine nel baricentro vengono scelti in modo da essere assi principali d'inerzia, gli assi traslati, in generale, non sono principali.

- Come caso particolare, quando il corpo è una figura piana e la traslazione viene effettuata nel piano della figura, per cui $d_3 = 0$, l'unico momento

di deviazione non nullo è ancora C' . E questo rimane immutato, dopo la traslazione, solo se almeno uno dei due parametri d_1, d_2 è nullo, in altri termini, se uno solo degli assi coordinati viene traslato. In questo caso, se gli assi erano principali d'inerzia prima della traslazione, anche gli assi traslati sono assi principali d'inerzia.

Rotazione degli assi

Quando si effettua una rotazione \underline{R} degli assi cartesiani, mantenendo invariata l'origine, la rappresentazione della matrice d'inerzia viene modificata attraverso la trasformazione di similitudine:

$$\hat{\underline{\sigma}} = \underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R} \quad (\text{MI.40})$$

In particolare è notevole il caso in cui la figura è piana e prima della rotazione la matrice σ viene riferita ad assi principali d'inerzia. Allora si hanno le seguenti rappresentazioni per le matrici:

$$\underline{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}, \quad \hat{\underline{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{A} & -\hat{C}' & 0 \\ -\hat{C}' & \hat{B} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A} + \hat{B} \end{pmatrix}$$

e si ottiene:

$$\hat{\underline{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando si ottengono le seguenti leggi di trasformazione per gli elementi di matrice:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \hat{B} &= B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha \\ \hat{C}' &= (A - B) \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\tag{MI.41}$$

essendo α l'angolo di rotazione nel piano xy della figura. Notiamo che:

$$\hat{A} + \hat{B} = A + B$$

e inoltre, se $A = B$ segue $\hat{A} = A$, $\hat{B} = B$, $\hat{C}' = 0$, che significa che se il corpo ha struttura giroscopica la matrice d'inerzia rimane inalterata dopo una rotazione attorno all'asse giroscopico.