MR. Cinematica relativa

La cinematica del *corpo rigido* consente di affrontare un ulteriore capitolo della cinematica del punto, che richiede di trattare, insieme al moto del punto, anche il moto di uno spazio rigido. Si tratta dello studio del moto di un punto rispetto a due distinti osservatori: è dato un osservatore dotato di un sistema cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3 \equiv Oxyz$ la cui base di versori è $\{\boldsymbol{c}_i\}$ che conveniamo di chiamare *assoluto*, e un secondo osservatore la cui terna cartesiana è $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3 \equiv \Omega\xi\eta\zeta$, la cui base di versori è $\{\boldsymbol{e}_i\}$, in moto arbitrario rispetto all'osservatore assoluto. Conveniamo di chiamare questo secondo osservatore *relativo*, essendo del tutto arbitraria la scelta di quale debba essere l'osservatore chiamato *assoluto* e quale *relativo.* Consideriamo, poi, un punto P che si può muovere rispetto ad entrambi gli osservatori: cerchiamo di stabilire il legame fra le posizioni, le velocità e le accelerazioni del punto P misurate dai due osservatori.

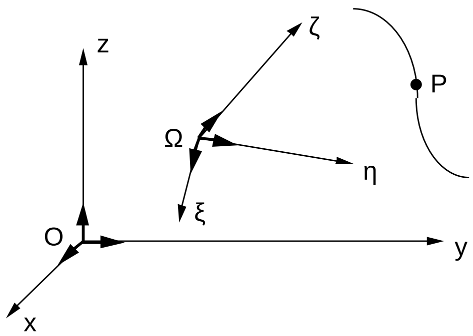

Figura MR. 1: moto di un punto rispetto a due osservatori

In questo problema il corpo rigido entra in gioco per il fatto che occorre conoscere il moto dello spazio solidale con il sistema relativo per stabilire i legami fra le velocità e le accelerazioni del punto P.

Ora è immediato stabilire il legame fra i vettori posizione del punto P, come sono visti dai due osservatori. Infatti si ha:

$$OP = O\Omega + \Omega P \tag{MR.1}$$

per cui basta conoscere il moto dell'origine della terna relativa per passare dal vettore posizione del punto rispetto ad un osservatore al vettore corrispondente per l'altro osservatore.

Teorema di derivazione relativa

Consideriamo un qualunque vettore $\boldsymbol{W}$ variabile nel tempo e la sua rappresentazione semicartesiana sulla base dell'osservatore relativo:

$$\boldsymbol{W} = W_i \boldsymbol{e}_i \tag{MR.2}$$

E' facile vedere che la sua derivata temporale è differente se viene calcolata rispetto all'osservatore relativo oppure rispetto all'osservatore assoluto. Infatti, l'osservatore assoluto vede la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ variabile nel tempo, in quanto la terna relativa è generalmente in moto rispetto alla terna assoluta, mentre l'osservatore relativo vede la stessa base immobile, in quanto ad esso solidale. Di conseguenza bisogna distinguere, per un vettore, una *derivata assoluta* calcolata rispetto all'osservatore assoluto e una *derivata relativa* calcolata rispetto all'osservatore relativo.

Abbiamo allora, in base alle definizioni date, per la derivata relativa:

$$\frac{d^{(r)}}{dt}\boldsymbol{W} = \dot{W}_i \boldsymbol{e}_i \tag{MR.3}$$

e per la derivata assoluta:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{W} = \frac{d^{(a)}}{dt}(W_i \boldsymbol{e}_i) = \dot{W}_i\, \boldsymbol{e}_i + W_i\, \frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{e}_i \tag{MR.4}$$

Poichè nella derivazione di uno scalare non esiste differenza fra derivata assoluta e derivata relativa, dal momento che non vengono coinvolti i versori della base, non essendoci possibilità di equivoco, abbiamo denotato semplicemente con un punto la derivata delle componenti W_i che compaiono nelle derivate.

Le *formule di Poisson* (CR.31) ci permettono di riscrivere la derivata assoluta come:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{W} = \dot{W}_i\,\boldsymbol{e}_i + W_i\,\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{e}_i \tag{MR.5}$$

Tenendo conto delle (MR.3) e (MR.4) otteniamo un legame fra la derivata assoluta e la derivata relativa di un vettore:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{W} = \frac{d^{(r)}}{dt}\boldsymbol{W} + W_i\,\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{e}_i$$

ovvero grazie alla (MR.2):

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{W} = \frac{d^{(r)}}{dt}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{W} \tag{MR.6}$$

Dal momento che il vettore $\boldsymbol{W}$ è del tutto arbitrario la relazione (MR.6) non dipende da $\boldsymbol{W}$, ma è una relazione caratteristica fra gli operatori di derivazione, che possiamo rappresentare sotto la forma:

$$\boxed{\frac{d^{(a)}}{dt} = \frac{d^{(r)}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\wedge} \tag{MR.7}$$

sottintendendo l'argomento degli operatori che deve essere una funzione vettoriale. Questa relazione prende il nome di *teorema di derivazione relativa.*

• Il termine aggiuntivo, nella (MR.6), $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{W}$ prende il nome *derivata di trascinamento*: il suo significato si comprende facilmente se si pensa che esso rappresenta la derivata assoluta rispetto al tempo quando il termine di derivazione relativa è nullo. In altri termini si può definire la *derivata di trascinamento* come *la derivata del vettore* $\boldsymbol{W}$ *come se, nell'istante considerato, fosse solidale con la terna relativa.*

• A quale condizione la derivata relativa e la derivata assoluta di un vettore $\boldsymbol{W}$ coincidono? Dal teorema di derivazione relativa si vede subito che la condizione necessaria e sufficiente affinchè questo accada è che:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{W} = 0$$

Questa condizione è soddisfatta se si verifica una di queste circostanze:

— se il vettore $\boldsymbol{W}$ è nullo, ma questo è un caso banale;

— se $\boldsymbol{\omega}$ è nulla, cioè se il moto relativo dei due osservatori è traslatorio;

— se $\boldsymbol{W}$ è parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$

Ne viene di conseguenza, come caso particolare, che il vettore velocità angolare ha derivata assoluta coincidente con la derivata relativa. Quando non ci sono equivoci come in questo caso la derivata temporale verrà indicata semplicemente con un punto, in quanto coincide per entrambi gli osservatori.

Teorema di composizione delle velocità

A questo punto possiamo introdurre il concetto di *velocità assoluta* del punto P, definita come:

$$\boldsymbol{v}^{(a)} = \frac{d^{(a)}}{dt} OP \qquad \text{(MR.8)}$$

e di *velocità relativa:*

$$\boldsymbol{v}^{(r)} = \frac{d^{(r)}}{dt} \Omega P \tag{MR.9}$$

dove si deve tener conto del fatto che le due origini O e Ω delle due terne generalmente non coincidono.

Poichè sussiste il legame (MR.1), derivando rispetto all'osservatore assoluto otteniamo:

$$\frac{d^{(a)}}{dt} OP = \frac{d^{(a)}}{dt} O\Omega + \frac{d^{(a)}}{dt} \Omega P \tag{MR.10}$$

Ora O è fisso rispetto all'osservatore assoluto; quindi:

$$\boldsymbol{v}_{\Omega} = \frac{d^{(a)}}{dt} O\Omega \tag{MR.11}$$

Questa quantità rappresenta la velocità del punto Ω rispetto all'osservatore assoluto e può essere denotata senza l'etichetta $^{(a)}$, perchè la velocità relativa di Ω è sempre nulla, essendo l'origine del sistema relativo, e quindi non ci può essere equivoco.

Rimane, allora, nella (MR.10):

$$\boldsymbol{v}^{(a)} = \boldsymbol{v}_{\Omega} + \frac{d^{(a)}}{dt} \Omega P \tag{MR.12}$$

Grazie al teorema di derivazione relativa (MR.7) e alla definizione di velocità relativa (MR.9) abbiamo subito:

$$\boldsymbol{v}^{(a)} = \boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{v}_{\Omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P \tag{MR.13}$$

Il termine che va aggiunto alla velocità relativa per ottenere la velocità assoluta viene denotato con:

$$\boldsymbol{v}^{(\tau)} = \boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P \qquad \text{(MR.14)}$$

e viene detto *velocità di trascinamento.* Confrontando l'espressione della velocità di trascinamento con la legge di distribuzione delle velocità nei corpi rigidi (CR.34) si comprende il significato fisico della *velocità di trascinamento:*

> *La velocità di trascinamento è la velocità del punto dello spazio rigido solidale con la terna relativa che, nell'istante considerato, si trova a coincidere con il punto mobile P*

• Si può anche dire, in maniera equivalente che la *velocità di trascinamento* è la velocità che il punto mobile P avrebbe se, nell'istante considerato, fosse solidale con il sistema relativo.

Facendo uso della (MR.14) la (MR.13) diviene alla fine:

$$\boxed{\boldsymbol{v}^{(a)} = \boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{v}^{(\tau)}} \qquad \text{(MR.15)}$$

relazione conosciuta come *teorema di composizione delle velocità* o *teorema di addizione delle velocità* o *teorema di Galileo.*

• Osserviamo che affinchè la velocità assoluta e quella relativa coincidano in ogni istante, qualunque sia il moto del punto, dovendo annullarsi la velocità di trascinamento, *basta* e *occorre* che:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv 0, \qquad \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}} \equiv 0$$

cioè i due osservatori devono essere in quiete l'uno rispetto all'altro.

Teorema di composizione delle accelerazioni

Introduciamo adesso i concetti di *accelerazione assoluta* e di *accelerazione relativa* del punto P, analogamente a come abbiamo fatto per le velocità:

$$\boldsymbol{a}^{(a)} = \frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(a)} \tag{MR.16}$$

$$\boldsymbol{a}^{(r)} = \frac{d^{(r)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(r)} \tag{MR.17}$$

e cerchiamo un legame fra le due accelerazioni. Cominciamo calcolando la derivata assoluta della (MR.15):

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(a)} = \frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(r)} + \frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{\tau})} \tag{MR.18}$$

Per il teorema di derivazione relativa (MR.7) otteniamo che il primo termine a secondo membro si può scrivere:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(r)} = \frac{d^{(r)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)} = \boldsymbol{a}^{(r)} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)} \tag{MR.19}$$

Inoltre:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{\tau})} = \frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}_{\Omega} + \frac{d^{(a)}}{dt}(\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) \tag{MR.20}$$

Introduciamo l'accelerazione (assoluta) di Ω:

$$\boldsymbol{a}_{\Omega} = \frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}_{\Omega} \tag{MR.21}$$

e calcoliamo:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\Omega P\right)=\dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge\Omega P+\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\frac{d^{(a)}}{dt}\Omega P\right)$$

Calcoliamo ora, a parte l'ultimo termine della relazione precedente, facendo uso del teorema di derivazione relativa. Otteniamo:

$$\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\frac{d^{(a)}}{dt}\Omega P\right)=\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\frac{d^{(r)}}{dt}\Omega P+\boldsymbol{\omega}\wedge\Omega P\right)=\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}^{(r)}+\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\Omega P)$$

Riassumendo abbiamo, per la derivata assoluta della velocità di trascinamento:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}\boldsymbol{v}^{(\tau)}=\boldsymbol{a}_{\Omega}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge\Omega P+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}^{(r)}+\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\Omega P) \qquad \text{(MR.22)}$$

Inserendo la (MR.19) e la (MR.22) nella (MR.18) ricaviamo infine:

$$\boldsymbol{a}^{(a)}=\boldsymbol{a}^{(r)}+\boldsymbol{a}_{\Omega}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge\Omega P+\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\Omega P)+2\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}^{(r)} \qquad \text{(MR.23)}$$

A questo punto, per interpretare i vari termini aggiuntivi, è conveniente introdurre:

$$\boldsymbol{a}^{(\tau)}=\boldsymbol{a}_{\Omega}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\wedge\Omega P+\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\Omega P) \qquad \text{(MR.24)}$$

termine al quale si dà il nome di *accelerazione di trascinamento.* Il raffronto con la legge di distribuzione delle accelerazioni del corpo rigido (CR.67), in maniera analoga a come si è proceduto per definire la velocità di trascinamento ci permette di interpretare l' accelerazione di trascinamento.

L'accelerazione di trascinamento è l'accelerazione del punto dello spazio rigido solidale con la terna relativa che, nell'istante considerato, si trova a coincidere con il punto mobile P

• Si può anche dire, in maniera equivalente che l'*accelerazione di trascinamento* è l'accelerazione che il punto mobile P avrebbe se, nell'istante considerato, fosse solidale con il sistema relativo.

Inoltre nel caso delle accelerazioni compare un ulteriore termine, che denotiamo con:

$$\boldsymbol{a}^{(c)} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}^{(r)} \tag{MR.25}$$

denominato *accelerazione di Coriolis* o *accelerazione complementare* , che non è presente se la velocità relativa è nulla.

Giungiamo allora alla forma finale del nostro risultato:

$$\boxed{\boldsymbol{a}^{(a)} = \boldsymbol{a}^{(r)} + \boldsymbol{a}^{(\tau)} + \boldsymbol{a}^{(c)}} \tag{MR.26}$$

Questo è il *teorema di composizione delle accelerazioni* o *teorema di addizione delle accelerazioni* o *teorema di Coriolis.*

Osserviamo che l'accelerazione assoluta e l'accelerazione relativa possono essere uguali, in ogni istante, anche se i due sistemi di riferimento non sono in quiete l'uno rispetto all'altro. Infatti per avere che l'accelerazione di trascinamento e quella di Coriolis siano nulle, qualunque sia il moto del punto P, *basta* e *occorre* che:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv 0, \qquad \boldsymbol{a}_{\Omega} \equiv 0$$

ovvero il moto del sistema relativo rispetto a quello assoluto sia *traslatorio uniforme.*

Teorema di composizione delle velocità angolari

Oltre alla *cinematica relativa del punto* si può sviluppare anche una *cinematica relativa del corpo rigido,* come di qualsiasi altro sistema di punti. Nel caso del corpo rigido, che ora esaminiamo, si considera il moto di un corpo rigido visto da due osservatori in moto relativo qualunque. Caratterizzare istante per istante l'*atto di moto* del corpo rigido rispetto all'osservatore assoluto e all'osservatore relativo significa, grazie alla legge di distribuzione delle velocità (CR.34) conoscere *la velocità di un punto* del corpo rigido rispetto ad entrambi gli osservatori e *la velocità angolare* del corpo rigido rispetto agli stessi osservatori.

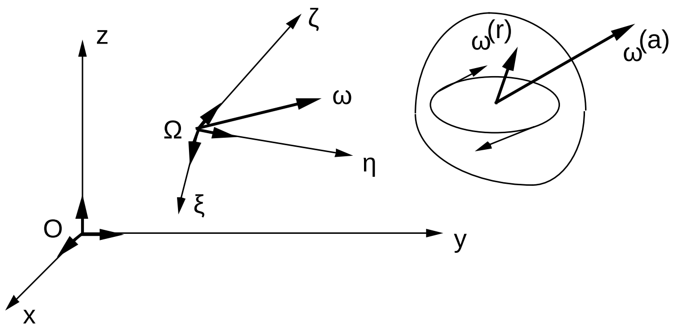

Figura MR. 2: moto di un corpo rigido rispetto a due osservatori

Poichè la velocità di un punto del corpo rigido, come la velocità di un punto mobile qualsiasi, si trasforma secondo il teorema di Galileo (MR.15), l'unica legge che rimane da determinare, per conoscere l'atto di moto, nei due sistemi di riferimento, è la legge di composizione delle velocità angolari.

Per determinarla consideriamo due punti P e Q del corpo rigido e il vettore solidale al corpo da essi individuato QP. Rispetto all'osservatore assoluto la derivata del vettore solidale, ricordando la (CR.35) si scriverà:

$$\frac{d^{(a)}}{dt} QP = \boldsymbol{\omega}^{(a)} \wedge QP \tag{MR.27}$$

Analogamente, rispetto al sistema relativo poichè il corpo si comporta come rigido rispetto ad entrambi gli osservatori, la derivata dello stesso vettore solidale si scrive:

$$\frac{d^{(r)}}{dt} QP = \boldsymbol{\omega}^{(r)} \wedge QP \tag{MR.28}$$

In queste leggi le quantità $\boldsymbol{\omega}^{(a)}$ e $\boldsymbol{\omega}^{(r)}$ rappresentano, evidentemente le velocità angolari del corpo rigido viste rispettivamente dall'osservatore assoluto e dall' osservatore relativo. Ma grazie al teorema di derivazione relativa (MR.7) possiamo legare le due derivate nel modo seguente:

$$\frac{d^{(a)}}{dt} QP = \frac{d^{(r)}}{dt} QP + \boldsymbol{\omega} \wedge QP \tag{MR.29}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ senza alcuna etichetta rappresenta, come al solito, la velocità angolare della terna relativa rispetto alla terna assoluta. Ora sostituendo le (MR.27) e (MR.28) nella (MR.29) otteniamo:

$$(\boldsymbol{\omega}^{(a)} - \boldsymbol{\omega}^{(r)} - \boldsymbol{\omega}) \wedge QP = 0 \tag{MR.30}$$

Questa relazione deve valere per ogni vettore QP solidale con il corpo; e dal momento che le velocità angolari non dipendono dal punto P che viene scelto, deve risultare necessariamente il legame fra le velocità angolari:

$$\boldsymbol{\omega}^{(a)} = \boldsymbol{\omega}^{(r)} + \boldsymbol{\omega} \tag{MR.31}$$

• Il termine aggiuntivo rappresenta la velocità angolare che il corpo rigido avrebbe se fosse solidale, nell'istante considerato, con il sistema relativo, essendo proprio la velocità angolare di questo sistema di riferimento. Perciò lo si denomina *velocità angolare di trascinamento:*

$$\boldsymbol{\omega}^{(\tau)} = \boldsymbol{\omega} \tag{MR.32}$$

Si giunge allora al *teorema di composizione delle velocità angolari* o *teorema di addizione delle velocità angolari:*

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}^{(a)} = \boldsymbol{\omega}^{(r)} + \boldsymbol{\omega}^{(\tau)}} \tag{MR.33}$$

Rotolamento di due superfici rigide

I risultati precedenti ci consentono di trattare il moto di due superfici (o di due curve) che rotolano l'una sull'altra. Il primo passo da fare a questo scopo consiste nel tradurre in termini matematici la nozione intuitiva di *rotolamento.* Consideriamo due superfici rigide regolari in moto relativo l'una rispetto all'altra: conveniamo di scegliere due terne di riferimento delle quali l'una è solidale con la prima superficie rigida e l'altra con la seconda superficie. Ponendoci ad osservare il moto solidalmente ad una delle due terne, che convenzionalmente chiameremo assoluta, diremo *fissa* la superficie solidale con questa terna e *mobile* l'altra superficie.

Diremo che le due superfici rotolano l'una sull'altra se in ogni istante, nei punti di intersezione presentano un contatto del primo ordine almeno, cioè se il piano tangente alle due superfici in quei punti è comune.

Ciascuno dei punti di intersezione tra le due superfici è un punto di contatto: consideriamo uno di tali punti di contatto C: generalmente esso varierà istante per istante, sia rispetto alla superficie fissa che rispetto a quella mobile, descrivendo due curve, una su ciascuna superficie, nel senso che non sarà sempre lo stesso punto di una delle due superficie a trovarsi a contatto con il medesimo punto dell'altra. Pensando il punto di contatto come un punto geometrico dotato di una sua individualità, che si muove lungo le curve suddette, negli intervalli in cui tali curve sono regolari, sarà possibile definire una velocità assoluta di C rispetto alla terna assoluta e una velocità relativa di C rispetto all'altra terna:

$$\boldsymbol{v}_C^{(a)} = \frac{d^{(a)}}{dt} OC, \qquad \boldsymbol{v}_C^{(r)} = \frac{d^{(r)}}{dt} \Omega C \tag{MR.34}$$

Si definisce allora *velocità di strisciamento* delle due superficie nel punto di contatto C la differenza fra le velocità che il punto C possiede rispetto ai due osservatori:

$$\boldsymbol{v}_C^{(s)} = \boldsymbol{v}_C^{(a)} - \boldsymbol{v}_C^{(r)} \tag{MR.35}$$

Ma grazie al teorema di addizione delle velocità (MR.15) questa non è altro che la velocità di trascinamento del punto C, cioè la velocità del punto della superficie mobile che nell'istante considerato coincide con C.

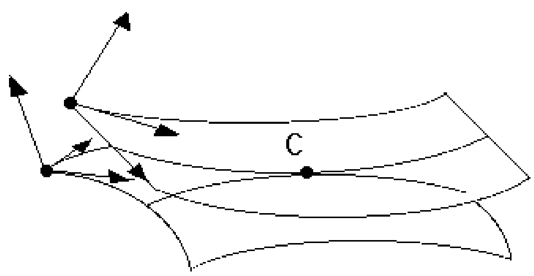

Figura MR. 3: rotolamento di due superficie

E' immediato ora estendere questi risultati a due curve che rotolano l'una sull'altra, anzichè due superficie.

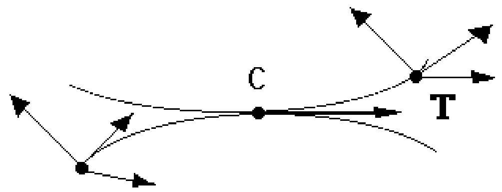

Figura MR. 4: rotolamento di due curve

E' chiaro che nel caso di due curve le traiettorie del punto C sono le curve stesse.

Dal punto di vista cinematico è rilevante il caso in cui due superfici o due curve *rotolano senza strisciare* l'una sull'altra.

Si dice che due superficie o due curve rotolano senza strisciare l'una sull'altra quando la velocità di strisciamento nel punto di contatto è nulla.

Allora risulta:

$$\boldsymbol{v}_C^{(a)} = \boldsymbol{v}_C^{(r)} \qquad \text{(MR.36)}$$

Si parla in questo caso di *puro rotolamento.* Stabilendo un sistema di ascisse curvilinee sulla traiettoria di C sulla superficie (o curva) fissa e su quella mobile possiamo rappresentare le velocità assoluta e relativa in forma intrinseca, e cioè:

$$\boldsymbol{v}_C^{(a)} = \dot{s}^{(a)}\boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{v}_C^{(r)} = \dot{s}^{(r)}\boldsymbol{T} \qquad \text{(MR.37)}$$

dove il versore tangente non ha etichetta perchè è comune alle due curve. Allora la condizione di puro rotolamento (MR.36) si traduce nella condizione differenziale scalare:

$$\dot{s}^{(a)} = \dot{s}^{(r)}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad ds^{(a)} = ds^{(r)} \qquad \text{(MR.38)}$$

La condizione scritta in forma di derivate significa l'uguaglianza delle velocità scalari del punto C rispetto ai due osservatori, mentre la condizione espressa in forma di differenziali significa l'uguaglianza degli archi elementari di traiettoria percorsi dal punto C lungo le due superfici (o curve). Se la condizione di puro rotolamento si mantiene per un tempo finito è possibile integrarla ottenendo l'uguaglianza di due percorsi finiti sulle traiettorie:

$$s^{(a)}(t) - s_0^{(a)} = s^{(r)}(t) - s_0^{(r)} \qquad \text{(MR.39)}$$

essendo $s_0^{(a)}$ e $s_0^{(r)}$ le posizioni iniziali.