Cinematica

CP. Cinematica del punto

Per iniziare a trattare la *cinematica* presupponiamo come primitive le nozioni di *spazio* e di *tempo* che assumiamo come note dalla fisica ed iniziamo subito ad esaminare come si caratterizza il moto di un punto. Il *punto geometrico* costituisce la prima e più rudimentale schematizzazione di un corpo, del quale si trascura la *struttura interna*, pensandolo come concentrato in un unico punto.

Il punto è caratterizzabile mediante un *vettore posizione* OP, riferibile ad un'*origine* O e ad un sistema di *assi cartesiani ortogonali* propri di un *osservatore* munito di un regolo per la misura delle lunghezze e di un sistema di orologi per la misura dei tempi. La conoscenza del vettore OP come *funzione del tempo* caratterizza completamente il *moto* del punto.

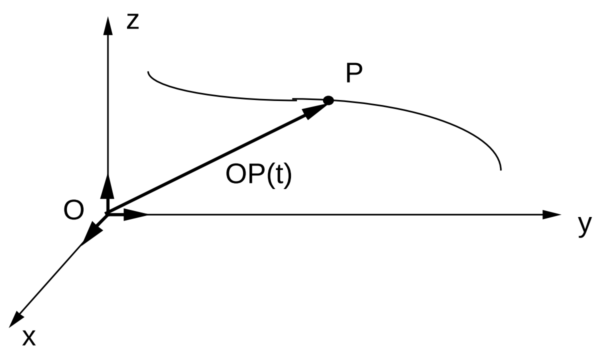

Figura CP. 1: moto di un punto riferito ad un osservatore

Conoscere il moto del punto P equivale a conoscere la funzione vettoriale del tempo:

$$OP = OP(t) \tag{CP. 1}$$

ovvero, proiettando sugli assi cartesiani del sistema di riferimento, conoscere le tre funzioni che danno le coordinate del punto in ogni istante:

$$x_i = x_i\,(t), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{CP. 2}$$

che scriveremo anche indifferentemente:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = y(t) \\ \\ z = z(t) \end{cases} \tag{CP. 3}$$

Dal punto di vista geometrico queste tre funzioni rappresentano la parametrizzazione di una curva rispetto al parametro t: tale curva viene detta *traiettoria* del moto ed è la curva che il punto P descrive nello spazio durante il suo moto.

E' conveniente, però introdurre un'altra parametrizzazione per la curva che si può ottenere mediante *l'ascissa curvilinea* s sulla traiettoria. Come è noto dalla geometria l'*ascissa curvilinea* è definita, rispetto ad un'altra parametrizzazione della curva (nel nostro caso quella in t) come:

$$s = \int_0^t ds(\,\hat{t}\,) \tag{CP. 4}$$

dove:

$$ds(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\; dt \tag{CP. 5}$$

Mediante questa nuova parametrizzazione la traiettoria viene descritta in modo puramente geometrico, senza includere il tempo come parametro, attraverso l'equazione vettoriale:

$$OP = OP(s) \tag{CP. 6}$$

o equivalentemente, proiettando sugli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ \\ y = y(s) \\ \\ z = z(s) \end{cases} \tag{CP. 7}$$

La legge che regola il cambio di parametrizzazione da t ad s è esprimibile come un legame funzionale del tipo:

$$s = s(t) \tag{CP. 8}$$

e prende il nome di *equazione oraria* o *legge oraria* del moto. Mentre la (CP. 6) contiene solamente le informazioni geometriche relative alla traiettoria, indipendentemente dalle informazioni sull'evoluzione temporale del moto, cioè sul *modo* come la traiettoria viene percorsa, la *legge oraria* non contiene nessuna informazione sulla *forma* della traiettoria, ma descrive propriamente il *modo* in cui essa viene percorsa nel tempo, cioè contiene tutte le informazioni sull'evoluzione temporale del moto.

Perciò questa rappresentazione del moto è particolarmente conveniente, perchè consente di separare le informazioni più propriamente *geometriche* da quelle strettamente *cinematiche* .

Cinematica lungo una traiettoria assegnata

Se si suppone assegnata la traiettoria del moto, cioè l'equazione vettoriale (CP. 6), o equivalentemente le equazioni (CP. 7), lo studio del moto si riconduce allo studio della sola legge oraria (CP. 8), che può essere riportata in grafico fornendo quello che si chiama *diagramma orario* del moto.

Si introduce, poi, il concetto di *velocità media* del punto, in un intervallo di tempo di estremi t_1 e t_2, come:

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \text{(CP. 9)}$$

e di *velocità istantanea* nell'istante generico t, come:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad \text{(CP. 10)}$$

dove con il punto si indica l'operazione di derivaizone rispetto al tempo.

Questa velocità viene propriamente denominata *velocità scalare* del moto lungo la traiettoria.

Un moto che avviene con velocità positiva è un moto in cui la funzione $s(t)$, avendo derivata positiva, è crescente: viene perciò detto moto *progressivo* , mentre un moto in cui la velocità scalare è negativa viene detto *regressivo*, in quanto $s(t)$ decresce. I punti in cui la velocità si annulla sono detti *punti di arresto*: quando i punti di arresto corrispondono a massimi o minimi relativi della funzione $s(t)$ vengono detti *punti di inversione* del moto, in quanto attraversandoli il moto cambia il verso di percorrenza della traiettoria.

Nel grafico riportato nella fig. (CP. 2) il moto risulta *progressivo* negli intervalli: $0 \leq t < t_1$, $t > t_2$ e *regressivo* nell'intervallo: $t_1 < t < t_2$. I punti caratterizzati dai valori del tempo t_1 e t_2 sono *punti di inversione*.

Per poter condurre lo studio della funzione $s(t)$ dal punto di vista analitico, in modo da valutarne gli estremanti, occorre introdurre anche la sua derivata seconda rispetto al tempo, che prende il nome di *accelerazione scalare*:

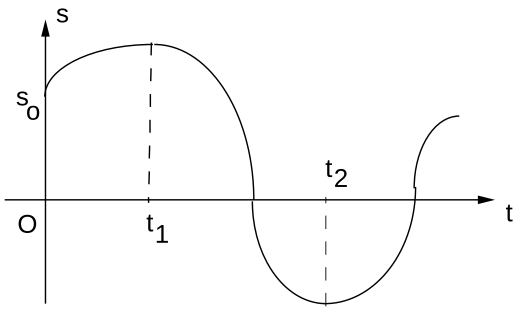

Figura CP. 2: diagramma orario del moto

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s} \qquad \text{(CP. 11)}$$

Si caratterizzano poi alcuni moti particolari:

Moto uniforme

Un moto si dice *uniforme* quando la sua accelerazione è nulla:

$$a = 0 \qquad \text{(CP. 12)}$$

Questa equazione si può riscrivere esplicitamente nella forma:

$$\ddot{s} = 0 \qquad \text{(CP. 13)}$$

che rappresenta l'equazione differenziale della legge oraria per il moto uniforme.

Integrata essa dà:

$$s(t) = v_0 t + s_0 \tag{CP. 14}$$

dove i valori delle due costanti v_0 ed s_0 sono dati dalle condizioni iniziali:

$$s_0 = s(0), \qquad v_0 = \dot{s}(0) \tag{CP. 15}$$

essendo s_0 la posizione iniziale del punto lungo la traiettoria e v_0 la sua velocità iniziale.

Moto uniformemente vario

Un moto si dice *uniformemente vario* quando la sua accelerazione è costante:

$$a = a_0 \tag{CP. 16}$$

ovvero:

$$\ddot{s} = a_0 \tag{CP. 17}$$

che integrata fornisce l' equazione oraria:

$$s(t) = \frac{1}{2}\, a_0 t^2 + v_0 t + s_0 \tag{CP. 18}$$

Il moto uniformemente vario si dirà *uniformemente accelerato* se $a_0 > 0$ e *uniformemente ritardato* se $a_0 < 0$.

Moto vario

Un moto si dice *vario* quando non rientra nelle due categorie precedenti: in questo caso la funzione $a(t)$ è qualunque e per determinare la legge oraria si dovrà procedere caso per caso a due successive integrazioni, una volta conosciuta la funzione *accelerazione scalare*. L'equazione differenziale del moto si scrive:

$$\ddot{s} = a(t) \tag{CP. 19}$$

Integrando una volta si ottiene la funzione *velocità:*

$$v(t) = \int_0^t a(\,\hat{t}\,)d\hat{t} + v_0 \tag{CP. 20}$$

Integrando una seconda volta si ha la legge oraria del moto:

$$s(t) = \int_0^t v(\,\hat{t}\,)d\hat{t} + v_0 t + s_0 \tag{CP. 21}$$

Cinematica vettoriale

Una descrizione *complessiva* del moto, che includa anche la traiettoria, si può fare considerando non appena la *legge oraria* (CP. 8), ma la funzione vettoriale (CP. 1). A questo scopo si definiscono:

— la *velocità vettoriale* del punto P:

$$\boldsymbol{v} = \frac{dOP}{dt} = \frac{dP}{dt} \tag{CP. 22}$$

dove la notazione abbreviata, che omette O per sottolineare che P è il punto variabile, è quella che useremo più frequentemente;

— l'*accelerazione vettoriale* del punto P:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} \tag{CP. 23}$$

Per evidenziare, nelle formule, ciò che dipende dalla geometria (*traiettoria*) e ciò che dipende dal tempo (*legge oraria*) è necessario pensare la funzione vettoriale $OP(t)$ come una *funzione composta* del tempo attraverso s:

$$OP = OP(s(t)) \tag{CP. 24}$$

in modo da evidenziare il legame tra le caratteristiche *geometriche* della traiettoria e le grandezze *cinematiche*.

In questo modo la *velocità vettoriale* si esprime come:

$$\boldsymbol{v} = \frac{dP}{ds}\frac{ds}{dt}$$

ma:

$$\boldsymbol{T} = \frac{dP}{ds} \tag{CP. 25}$$

è il versore tangente [1] alla traiettoria nel punto P. Di conseguenza si ottiene:

[1] Richiami sulla geometria delle curve si possono trovare nell'appendice *CU - Proprietà differenziali delle curve*.

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \dot{s}\,\boldsymbol{T}} \tag{CP. 26}$$

relazione che ci informa che:

> *La velocità vettoriale è un vettore sempre* tangente *alla traiettoria e di modulo uguale al valore assoluto della velocità scalare*

La rappresentazione (CP. 26) prende il nome di *rappresentazione intrinseca* della velocità vettoriale.

Derivando la (CP. 26) rispetto al tempo ricaviamo l'accelerazione vettoriale:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\,\boldsymbol{T}) = \ddot{s}\,\boldsymbol{T} + \dot{s}\,\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} \tag{CP. 27}$$

ma $\boldsymbol{T}$ è funzione composta del tempo attraverso s, per cui possiamo scrivere:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \tag{CP. 28}$$

Ora, dalla teoria delle curve sappiamo che:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = C\boldsymbol{N} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{N} \tag{CP. 29}$$

dove $\boldsymbol{N}$ è il versore *normale principale* alla curva e:

$$C = \frac{1}{\rho} \tag{CP. 30}$$

è la *curvatura principale* e ρ è il *raggio di curvatura* ed è uguale al raggio del *cerchio osculatore*.

Dunque sostituendo nella (CP. 28) otteniamo:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho}\,\boldsymbol{N}$$

e quindi nell'equazione dell'accelerazione (CP. 27), abbiamo:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \ddot{s}\,\boldsymbol{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\boldsymbol{N}} \tag{CP. 31}$$

Questa è la *rappresentazione intrinseca* dell'accelerazione vettoriale.

Il vettore *accelerazione* possiede due componenti:

— una componente *tangenziale* , cioè diretta come il versore tangente alla curva, il cui valore è uguale all'accelerazione scalare:

$$a_T = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{T} = \ddot{s} \tag{CP. 32}$$

— una componente *normale* , cioè diretta come il versore normale principale all curva, il cui valore è dato da:

$$a_N = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{N} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \tag{CP. 33}$$

Il termine a_T è responsabile delle variazioni del *modulo* del vettore velocità; infatti:

$$\frac{d\,|\boldsymbol{v}|}{dt} = \frac{d\sqrt{\boldsymbol{v}^2}}{dt} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\boldsymbol{v}^2}} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \times \boldsymbol{a} = \pm\,\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{a} = \pm\,a_T$$

L'accelerazione normale è, invece di conseguenza, responsabile delle variazioni della *direzione* del vettore velocità.

Osserviamo, ancora, che se si richiede che $\boldsymbol{v}$ sia costante durante il moto, il che equivale a dire, che il vettore accelerazione sia nullo:

$$\boldsymbol{v} = costante \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{a} = 0$$

dalla (CP. 31) abbiamo:

$$\ddot{s}\,\boldsymbol{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\boldsymbol{N} = \mathbf{o}$$

Dal momento che $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{N}$ sono vettori linearmente indipendenti, la condizione precedente equivale a dire:

$$\ddot{s} = 0, \qquad \frac{\dot{s}^2}{\rho} = C\dot{s}^2 = 0 \tag{CP. 34}$$

La prima delle condizioni (CP. 34) equivale alla richiesta che il moto sia *uniforme* (CP. 13) e il suo integrale è dato dalla legge oraria (CP. 14); la seconda, dal momento che, in generale $\dot{s} \neq 0$, altrimenti P sarebbe in quiete, equivale a richiedere che $C = 0$, ovvero che $\rho \to \infty$, e cioè che il moto sia *rettilineo*.

Poichè all'istante iniziale $t = 0$ abbiamo:

$$\dot{s}(0) = v_0, \qquad v_0\,\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{v}_0 \tag{CP. 35}$$

e all'istante generico t la velocità vale:

$$\boldsymbol{v} = v_0\,\boldsymbol{T} \tag{CP. 36}$$

l'equazione della traiettoria sarà data dalla condizione sulla tangente:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dP}{ds} = \boldsymbol{T}_0 = \frac{\boldsymbol{v}_0}{v_0} \tag{CP. 37}$$

Integrando rispetto ad s si ottiene l'equazione vettoriale di una retta nel parametro s:

$$OP(s) = (s - s_0)\,\frac{\boldsymbol{v}_0}{v_0} \tag{CP. 38}$$

che è evidentemente l'equazione vettoriale di una retta passante per la posizione iniziale $OP_0 = s_0\,\boldsymbol{T}_0$.

Come si è visto in questo semplice esempio, dalla cinematica vettoriale si hanno informazioni sia sulla *legge oraria* che sulla *traiettoria*.

Integrazione dell'equazione vettoriale del moto

Noto il vettore accelerazione in funzione del tempo:

$$\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

l'equazione differenziale del moto, in forma vettoriale è:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \boldsymbol{a}(t) \tag{CP. 39}$$

che proiettata su un sistema di assi cartesiani ortogonali rappresenta un sistema di equazioni differenziali del sesto ordine:

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_x(t) \\ \ddot{y} = a_y(t) \\ \ddot{z} = a_z(t) \end{cases} \tag{CP. 40}$$

Sistema che integrato una volta fornisce le componenti del vettore velocità in funzione del tempo:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \\ v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \\ v_z(t) = v_{0z} + \int_0^t a_z(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \end{cases} \tag{CP. 41}$$

e integrato una seconda volta dà le coordinate del punto in funzione del tempo (integrale del moto):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \\ y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \end{cases} \tag{CP. 42}$$

Questi risultati si possono riassumere in rappresentazione indicale come:

$$v_i(t) = v_{0i} + \int_0^t a_i(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \tag{CP. 43}$$

e rispettivamente:

$$x_i(t) = x_{0i} + \int_0^t v_i(\,\hat{t}\,)\,d\hat{t} \tag{CP. 44}$$

ovvero nella rappresentazione vettoriale simbolica:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{a}(\,\hat{t}\,)\, d\hat{t} \tag{CP. 45}$$

$$OP(t) = OP_0 + \int_0^t \boldsymbol{v}(\,\hat{t}\,)\, d\hat{t} \tag{CP. 46}$$

Questi risultati significano che l'integrazione di una funzione vettoriale equivale all'integrazione di ogni sua componente.

Moti piani in coordinate polari

Diamo anzitutto la seguente definizione di *moto piano*:

> *Un moto si dice piano quando la sua traiettoria è contenuta in un piano invariabile rispetto all' osservatore, che si dice piano del moto*

Di conseguenza nel caso del moto piano i versori *tangente* e *normale* principale appartengono al piano del moto, che coincide con il piano osculatore della traiettoria, mentre il versore *binormale* è costante e normale al piano del moto: questo è sufficiente a garantire che il vettore velocità e il vettore accelerazione, in base alla (CP. 26) e, rispettivamente alla (CP. 31), appartengano al piano del moto.

Spesso può essere conveniente, quando si analizza un *moto piano* proiettare le equazioni vettoriali del moto, anzichè su di un sistema cartesiano, su un sistema di *coordinate polari* (r, ϑ) disposto come in figura (**??**).

In questo sistema di coordinate:

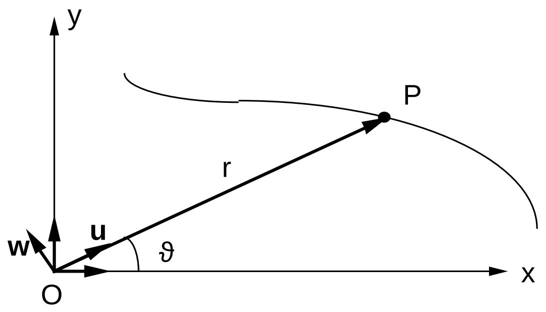

Figura CP. 3: rappresentazione di un moto piano in coordinate polari

$$r = |OP| \tag{CP. 47}$$

è il modulo del raggio vettore che individua il punto P e ϑ è l'angolo formato da OP con l'orientazione positiva delle ascisse.

Anzichè fare uso della base ortonormale degli assi cartesiani ortogonali:

$$\{\boldsymbol{e}_i, \; i = 1, 2\}$$

si introducono i nuovi versori:

$$\boldsymbol{u} = \underset{\sim}{R}\, \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{w} = \underset{\sim}{R}\, \boldsymbol{e}_2 \tag{CP. 48}$$

essendo:

$$\underset{\sim}{R} \equiv \begin{pmatrix} cos\,\vartheta & -sen\,\vartheta \\ \\ sen\,\vartheta & cos\,\vartheta \end{pmatrix} \tag{CP. 49}$$

la matrice di rotazione 2×2 che definisce una rotazione di un angolo ϑ nel piano del moto. Si ottengono subito le componenti cartesiane dei nuovi versori di base:

$$\boldsymbol{u} \equiv (cos\vartheta, sen\,\vartheta), \qquad \boldsymbol{w} \equiv (-sen\vartheta, cos\,\vartheta) \tag{CP. 50}$$

che sono manifestamente ortonormali essendo stati ottenuti mediante rotazione di una base ortonormale.

Il legame tra le coordinate cartesiane e le coordinate polari nel piano risulta allora esprimibile nella forma:

$$\begin{cases} x = OP \times \boldsymbol{e}_1 \\ \\ y = OP \times \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{CP. 51}$$

Ma essendo:

$$OP = r\boldsymbol{u} \tag{CP. 52}$$

segue:

$$\begin{cases} x = r\,cos\,\vartheta \\ \\ y = r\,sen\,\vartheta \end{cases} \tag{CP. 53}$$

A questo punto siamo in grado di caratterizzare le grandezze cinematiche $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$, per il moto piano, in coordinate polari.

Per la velocità, derivando rispetto al tempo la (CP. 52) abbiamo:

$$\boldsymbol{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{u}) = \dot{r}\,\boldsymbol{u} + r\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \tag{CP. 54}$$

Ma $\boldsymbol{u}$ è funzione composta del tempo attraverso ϑ, dunque svilupperemo la derivata nel modo seguente:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{u}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} \tag{CP. 55}$$

Dalla (CP. 50) ricaviamo:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{d\vartheta} \equiv (-sen\,\vartheta, cos\,\vartheta) \equiv \boldsymbol{w} \tag{CP. 56}$$

Quindi:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \dot{\vartheta}\,\boldsymbol{w} \tag{CP. 57}$$

Sostituendo questi risultati nella (CP. 54) otteniamo l'espressione finale per la velocità nei moti piani, in coordinate polari:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{u} + r\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{w}} \tag{CP. 58}$$

Per valutare l'accelerazione in coordinate polari procediamo analogamente. Scriviamo:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\boldsymbol{u}+r\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{w}) = \ddot{r}\,\boldsymbol{u}+\dot{r}\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\dot{r}\,\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{w}+r\,\ddot{\vartheta}\,\boldsymbol{w}+r\,\dot{\vartheta}\,\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \tag{CP. 59}$$

Ci occorre valutare ancora:

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{w}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} \tag{CP. 60}$$

E dalla (CP. 50):

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{d\vartheta} \equiv (-cos\,\vartheta, -sen\,\vartheta) \equiv -\boldsymbol{u} \qquad \text{(CP. 61)}$$

Quindi:

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = -\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{u} \qquad \text{(CP. 62)}$$

In conclusione, inserendo la (CP. 57) e la (CP. 62) nella (CP. 59) otteniamo la rappresentazione dell'accelerazione per i moti piani:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\vartheta}^2)\,\boldsymbol{u} + (r\,\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\,\dot{\vartheta})\,\boldsymbol{w}} \qquad \text{(CP. 63)}$$

Sia per la velocità che per l'accelerazione vengono denominate come: *radiale* la componente secondo $\boldsymbol{u}$ e *trasversale* la componente secondo $\boldsymbol{w}$. Si utilizzano le seguenti notazioni:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} & \textit{velocità radiale} \\ v_\vartheta = r\,\dot{\vartheta} & \textit{velocità trasversale} \\ & \\ a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\vartheta}^2 & \textit{accelerazione radiale} \\ a_\vartheta = r\,\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\,\dot{\vartheta} & \textit{accelerazione trasversale} \end{cases} \qquad \text{(CP. 64)}$$

Velocità areale

Trattando dei *moti piani* è particolarmente utile definire anche una grandezza legata all'area che il raggio vettore descrive durante il moto: *si dice velocità areale l'area che il raggio vettore descrive nell' unità di tempo*.

Considerando un intervallo di tempo Δt il raggio vettore OP ruoterà di un angolo $\Delta\vartheta$ attorno ad O a partire dalla direzione ϑ che aveva all'inizio dell'intervallo. Pensando che Δt sia *abbastanza piccolo* l'area descritta dal raggio vettore OP, nell'intervallo di tempo Δt sarà uguale all'area del settore circolare di raggio r e angolo al centro $\Delta\vartheta$, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo. Cioè si avrà:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\, r^2 \Delta\vartheta + \mathcal{O}[(\Delta\vartheta)^2] \qquad \text{(CP. 65)}$$

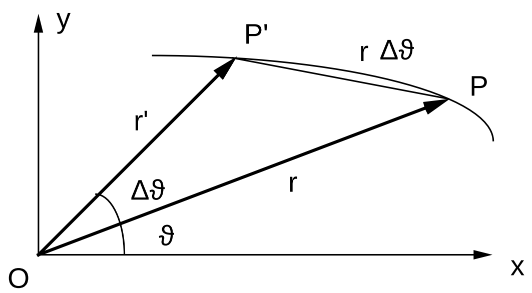

Figura CP. 4: area descritta dal raggio vettore durante il moto

La *velocità areale*, perciò, considerando che ϑ è funzione del tempo si potrà rappresentare in coordinate polari come:

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2 \dot{\vartheta} \qquad \text{(CP. 66)}$$

Analogamente si definisce l'*accelerazione areale* come derivata della velocità areale rispetto al tempo. Ne risulta:

$$\ddot{A} = r\,\dot{r}\,\dot{\vartheta} + \frac{r^2}{2}\,\ddot{\vartheta} = \frac{r}{2}\,(2\dot{r}\,\dot{\vartheta} + r\,\ddot{\vartheta}) \qquad \text{(CP. 67)}$$

Confrontando con l'espressione dell' accelerazione trasversale nelle (CP. 64) risulta un legame fra l'accelerazione areale e l'accelerazione trasversale del moto del punto. Abbiamo:

$$\ddot{A} = \frac{r}{2} a_\vartheta \qquad \text{(CP. 68)}$$

Osserviamo che se $a_\vartheta = 0$, cioè se l'accelerazione è interamente *radiale*, allora l'accelerazione areale è nulla, e viceversa. In questo caso la velocità areale è costante.

Moti centrali

Diamo ora la definizione di *moto centrale*:

> *Un moto si dice centrale quando esiste un punto O (detto centro del moto) fisso rispetto all'osservatore e tale che l'accelerazione del moto è parallela al raggio vettore OP oppure è nulla*

La condizione di parallelismo fra OP e $\boldsymbol{a}$, includendo anche il caso in cui $\boldsymbol{a}$ si annulli, si può esprimere mediante la relazione vettoriale:

$$OP \wedge \boldsymbol{a} = \mathbf{o} \qquad \text{(CP. 69)}$$

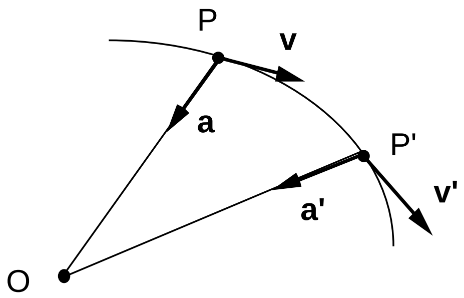

Figura CP. 5: moto centrale

Da questa relazione, per la definizione di velocità vettoriale (CP. 22), si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(OP \wedge \boldsymbol{v}) = \mathbf{o} \qquad \text{(CP. 70)}$$

Infatti il calcolo diretto ci dà:

$$\frac{d}{dt}(OP \wedge \boldsymbol{v}) = \frac{dP}{dt} \wedge \boldsymbol{v} + OP \wedge \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = OP \wedge \boldsymbol{a}$$

dal momento che il primo prodotto vettoriale a secondo membro si annulla.

Ora, dalla (CP. 70) segue l'esistenza di un vettore *costante* $\boldsymbol{c}$, caratteristico del moto, tale che risulta:

$$OP \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} \qquad \text{(CP. 71)}$$

Il vettore costante $\boldsymbol{c}$ può essere calcolato mediante le condizioni iniziali, dal momento che non cambia nel tempo. Si ha allora:

$$\boldsymbol{c} = OP_0 \wedge \boldsymbol{v}_0 \tag{CP. 72}$$

dove:

$$OP_0 = OP(0), \qquad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(0)$$

Esaminiamo i due casi che si possono presentare nel moto centrale:

— *primo caso:* $\boldsymbol{c} = \mathbf{o}$

Questa informazione comporta nella (CP. 71):

$$OP \wedge \boldsymbol{v} = \mathbf{o}, \qquad \forall t \tag{CP. 73}$$

Ma tendendo conto della rappresentazione intrinseca della velocità (CP. 26) si ottiene:

$$OP \wedge (\dot{s}\,\boldsymbol{T}) = \mathbf{o} \tag{CP. 74}$$

Se si esclude che il caso banale in cui $\dot{s} = 0 \ \ \forall t$, cioè il caso in cui il punto è in quiete, e quindi anche il caso in cui $OP = \mathbf{o}$ in ogni istante, rimane, in generale:

$$OP \ \ || \ \ \boldsymbol{T} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{s}\,\boldsymbol{T} + C\,\dot{s}^2\boldsymbol{N} \ \ || \ \ \boldsymbol{T} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 0$$

Dunque esiste uno scalare λ tale che:

$$OP = \lambda\,\boldsymbol{T} \tag{CP. 75}$$

E questa è l'equazione della traiettoria del moto, che risulta essere una retta passante per il centro O. Inoltre, evidentemente $\lambda = s$, cioè all'ascissa curvilinea.

— *secondo caso:* $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{o}$

In questo caso la definizione di prodotto vettoriale impone che i vettori OP e $\boldsymbol{v}$ siano ortogonali al vettore costante $\boldsymbol{c}$; o, al più possano annullarsi in certi istanti. Ma allora se OP appartiene al piano normale a un vettore costante, ne consegue che la traiettoria sta su quel piano e quindi il moto è piano e il piano del moto è il piano invariabile normale al vettore costante, non nullo $\boldsymbol{c}$.

Possiamo, perciò utilizzare le formule per i moti piani (CP. 58) e (CP. 52) e calcolare il vettore $\boldsymbol{c}$ esplicitamente. Abbiamo:

$$\boldsymbol{c} = OP \wedge \boldsymbol{v} = r\,\boldsymbol{u} \wedge (\dot{r}\,\boldsymbol{u} + r\,\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{w}) = r^2\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$$

Introduciamo ora il novo versore, normale al piano del moto:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w} \qquad \text{(CP. 76)}$$

e otteniamo, finalmente, l'espressione del vettore che si mantiene costante durante il moto:

$$\boldsymbol{c} = r^2\dot{\vartheta}\,\boldsymbol{k} \qquad \text{(CP. 77)}$$

E' comodo anche introdurre la costante scalare, che non è altro che la componente di $\boldsymbol{c}$ lungo $\boldsymbol{k}$:

$$c = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{k} = r^2\dot{\vartheta} \qquad \text{(CP. 78)}$$

Il confronto con (CP. 66) ci dà poi il legame fra c e la velocità areale:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\, c \qquad \text{(CP. 79)}$$

• In un moto centrale abbiamo dunque che la velocità areale è costante: per questo a c si dà il nome di *costante delle aree*.

D'altra parte il fatto che in un moto centrale la velocità areale è costante non ci sorprende, in quanto, essendo l'accelerazione interamente *radiale* per definizione di moto centrale, risulta:

$$a_\vartheta = 0$$

e di conseguenza, grazie alla (CP. 68) segue subito la costanza della velocità areale, annullandosi l'accelerazione areale.

Formula di Binet

Il fatto di poter disporre di una *legge di conservazione* come la (CP. 79), in un moto centrale, rende possibile l'eliminazione delle derivate temporali dalla formula dell' accelerazione, in quanto $\dot{\vartheta}$ si può esprimere come:

$$\dot{\vartheta} = \frac{c}{r^2} \qquad \text{(CP. 80)}$$

Per eliminare poi $\dot{r}$ dall'equazione dell'accelerazione radiale teniamo conto che la variabile r si può pensare come una funzione composta del tempo attraverso la ϑ, cioè:

$$r = r(\vartheta(t))$$

Allora derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (CP. 80):

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta}\,\dot{\vartheta} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\vartheta}$$

che si può riscrivere:

$$\dot{r} = -c\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta} \tag{CP. 81}$$

Derivando ancora rispetto al tempo otteniamo:

$$\ddot{r} = -c\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2}\,\dot{\vartheta}$$

E quindi dopo aver eliminato $\dot{\vartheta}$ con il solito metodo:

$$\ddot{r} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} \tag{CP. 82}$$

A questo punto, sostituendo nell'equazione dell'accelerazione radiale che troviamo fra le (CP. 64) otteniamo un'equazione che non contiene più derivate temporali ma solamente derivate rispetto a ϑ:

$$\boxed{a_r = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}\right)} \tag{CP. 83}$$

Questa formula è nota come *formula di Binet*: la sua utilità consiste nel fatto che rende possibile il calcolo dell'accelerazione mediante la sola conoscenza della traiettoria, cioè mediante un'informazione di tipo geometrico, in quanto i termini cinematici che provengono dalla legge oraria sono stati eliminati mediante la costanza della velocità areale.

Un'analoga formula si ottiene per il quadrato della velocità nei moti centrali. Infatti, dalla (CP. 58) possiamo calcolare:

$$\boldsymbol{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\vartheta}^2$$

da cui, facendo uso delle (CP. 80) e (CP. 81) si ricava:

$$\boxed{\boldsymbol{v}^2 = c^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]} \qquad \text{(CP. 84)}$$

Moti celesti

Queste formule trovano una loro applicazione nella meccanica dei corpi celesti: è noto che per il moto dei pianeti valgono le tre *leggi di Keplero*:

— *prima legge*: Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi;

— *seconda legge*: il raggio vettore sole–pianeta descrive aree uguali in tempi uguali (*legge delle aree*);

— *terza legge*: il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è uguale per tutti i pianeti e costituisce una costante caratteristica del sistema solare:

$$\frac{T^2}{a^3} = K \qquad \text{(CP. 85)}$$

La *seconda legge* ci dice subito che il moto dei pianeti è *centrale* e quindi l'accelerazione è solamente *radiale*; perciò possiamo utilizzare la *formula di Binet*.

La *prima legge* si traduce nell'equazione polare della traiettoria:

$$r = \frac{p}{1 + e\,cos\,\vartheta} \tag{CP. 86}$$

avendo scelto, per convenienza, l'asse delle ascisse diretto come l'asse maggiore dell'ellisse. Ricordiamo che l'equazione (CP. 86) è l'equazione di una conica e che per l'ellisse si ha:

$$0 \ \leq \ e < 1 \tag{CP. 87}$$

essendo $e = 0$ il caso della *circonferenza* di raggio $r = p$.

E' noto dall'osservazione astronomica che le comete si possono muovere anche lungo traiettorie paraboliche e iperboliche. Questi casi corrispondono ad eccentricità $e \geq 1$, secondo lo schema riassuntivo seguente:

$$\begin{cases} e = 0 & \textit{circonferenza} \\ 0 < e < 1 & \textit{ellisse} \\ e = 1 & \textit{parabola} \\ e > 1 & \textit{iperbole} \end{cases} \tag{CP. 88}$$

Dalla (CP. 86) otteniamo:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\,cos\,\vartheta$$

da cui:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta} = -\frac{e}{p}\, sen\,\vartheta \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} = -\frac{e}{p}\, cos\,\vartheta$$

risultati che inseriti nella formula di Binet (CP. 83) danno:

$$a_r = -\frac{c^2}{p}\,\frac{1}{r^2} \tag{CP. 89}$$

Dunque dalle leggi di Keplero, attraverso le formule dei moti centrali, è possibile dedurre la legge di proporzionalità fra l'accelerazione e l'inverso del quadrato della distanza fra sole e pianeta. Fu questa deduzione che condusse Newton alla formulazione delle legge di gravitazione universale.