LA PERCEZIONE DEI FONDAMENTI NEL PENSIERO LOGICO E MATEMATICO

Alberto Strumia*

Introduzione

Data la mia origine di fisico matematico, successivamente applicatosi agli studi teologici e filosofici, nella mia storia personale ho sempre avuto il desiderio di tentare di mettere a confronto alcune delle problematiche che sono sorte nell'ambito delle scienze con l'impianto aristotelico-tomista. Perciò quanto propongo in questo contributo non è una trattazione squisitamente filosofica, né tecnicamente scientifica: si tratta piuttosto di un tentativo di mostrare come la metafisica sia qualcosa di molto diverso da quello che solitamente si immagina… Un'idea di metafisica abbastanza comune, infatti, vede questa disciplina[1] come dedicata a qualcosa di irreale, essendo la più lontana e astratta dall'esperienza. Non si dovrebbe, invece, dimenticare che, nell'antichità, la metafisica è nata dalle scienze empiriche e matematiche. I primi filosofi furono gli Ionici, detti "fisici" (*naturales*), i quali intesero spiegare che cos'è la materia: la sua "struttura" e il suo "divenire", cioè quella che oggi, nel linguaggio delle scienze, chiamiamo la "dinamica" della materia. Dopo di loro gli antichi si accorsero che una descrizione puramente "qualitativa" non era sufficiente, e si tentò di utilizzare la matematica per comprendere la realtà del mondo fisico: ecco il filone "pitagorico". La crisi degli irrazionali bloccò, ad un certo punto, l'applicazione della matematica greca alla natura e si aprì la strada per giungere a scoprire dei "principi formali" più fondativi, che si presentavano come indispensabili per evitare le contraddizioni logiche che insorgevano quando si tentava di comprendere l'essere e il divenire della materia e, più in generale, di ogni ente concepibile. In fondo la metafisica è sorta in gran parte così: per "salvare" la realtà della conoscenza e per evitare le contraddizioni logiche. Con Parmenide ed Eraclito le contraddizioni erano inevitabili sia nello spiegare la struttura della materia, e più in generale dell'ente, e sia per spiegare il divenire; fino a che non si scoprì l'*analogia entis* con Aristotele. È molto significativo rilevare come in tempi ben più vicini a noi (tra la fine dell'800 e l'inizio '900) nell'ambito della matematica per evitare le contraddizioni logiche si sia, di fatto e inconsapevolmente, riscoperta l'analogia dell'ente. A differenza di quanto accadde nell'antichità ai nostri giorni, però, i filosofi non sono troppo spesso a conoscenza dei problemi fisici e matematici, e viceversa gli scienziati non hanno una strumentazione filosofica adeguata per compiere questo confronto interdisciplinare. In un'ottica seriamente interdisciplinare, oggi, la metafisica può essere ritrovata come una "teoria dei fondamenti delle scienze", anziché come qualcosa di lontano, irraggiungibile e in fin dei conti poco importante. Da un lato essa sta "più in alto" (al massimo grado di astrazione cognitiva), dall'altro sta "a fondamento", come a dire "al di sotto" di tutta la realtà sperimentabile. Questo mi sembra un aspetto abbastanza nuovo e degno di essere preso seriamente in considerazione[2].

---

* Presidente del Centro di Documentazione Interdisciplinare di Scienza e Fede della Pontifica Università della S. Croce in Roma e vicedirettore del Portale www.disf.org. Siti web: www.albertostrumia.it (personale) e www.sisri.it (Scuola internazionale superiore per la ricerca interdisciplinare). Un'esposizione multimediale dei contenuti che qui vengono proposti si può trovare *on line* nel sito della *Scuola internazionale per la ricerca interdisciplinare* (www.sisri.it) nella sezione "Seminario permanente".

[1] E in questo senso anche la logica, in quanto è abbinata alla metafisica: ricordiamo che in Tommaso le due discipline non sono mai del tutto separate.

[2] Ho seguito questa impostazione in diversi dei miei studi. *Cfr.,* ad esempio, *Le scienze e la pienezza della razionalità,* Cantagalli, Siena 2003; "Materia", in G. Tanzella-Nitti e A. Strumia (a cura di), *Dizionario interdisciplinare di scienza e fede,* Città

Dopo questa premessa, che può servire da introduzione, l'intento di questo contributo è quello di mostrare come, sul versante delle discipline matematiche – ma si può farlo anche nell'ambito di quelle fisiche, biologiche e non solo – sia sorta una certa "percezione" della necessità di fondamenti logici e metafisici alla base delle scienze. Suddivideremo questo percorso in tre punti.

1 - Nel primo punto cercheremo descrivere in che cosa consiste questa "percezione" dei fondamenti, che è nata dalla constatazione di come le scienze stesse rischino di bloccarsi se non si "ampliano", almeno in una certa misura, verso la metafisica: si tratta di un processo che, in un certo senso, inverte il percorso cartesiano. Quest'ultimo partiva dal rilievo fattuale che le matematiche, e le scienze matematizzate cioè quelle elaborate principalmente da Galileo e Newton, avevano avuto un grande successo (capacità esplicativa e predittiva), mentre la filosofia si presentava in un certo qual modo come arenata. Per cui, a parere di Descartes e di quanti lo hanno seguito, si rendeva necessario importare il metodo delle scienze matematizzate anche nella filosofia[3]. Oggi, invece, si constata come le scienze, quando cercano di conoscere più in profondità e ampiezza il loro oggetto, si scontrino con delle contraddizioni logiche. Ora sembrano essere le scienze stesse a "bloccarsi" se non riscoprono alcuni principi logico-metafisici irrinunciabili. È in questo senso che si può parlare di un rovesciamento del percorso cartesiano.

2 - Nel secondo punto esamineremo, almeno per accenni, alcuni aspetti significativi nel percorso storico della matematica. La domanda da cui partire sarà la seguente: siamo in possesso di risultati tecnici e scientifici nell'ambito della matematica che diano corpo a questa "percezione" della necessità di reperire dei fondamenti irrinunciabili, di tipo logico e metafisico, alla base delle scienze?

Ed è notevole constatare come questi fondamenti richiesti dalle scienze si ritrovino più naturalmente in Tommaso e Aristotele, piuttosto che in Descartes e Kant e nel pensiero successivo.

3 - Nel terzo punto cercheremo di trarre le conseguenze e di operare un primo passo che vada dalle problematiche "interne" alle teorie matematiche a questi fondamenti logici e metafisici.

Incidentalmente, ma non secondariamente, si deve rilevare come le problematiche concomitanti che emergono, come del resto accade per ogni metafisica, non si limitano alle sole questioni specialistiche e tecniche, ma entrano anche nella dinamica della vita e della cultura che sta alla base di una società, hanno delle implicazioni sulla vita pratica, costituiscono i termini di una filosofia che possiamo qualificare come "non disincarnata".

Nuova e Urbaniana University Press, Roma 2012, vol. 1, pp. 849-866 (www.disf.org/Voci/80.asp); *Il problema dei fondamenti. Un'avventurosa navigazione dagli insiemi agli enti passando per Godel e Tommaso d'Aquino,* Cantagalli, Siena 2009.

[3] Egli stesso lo dichiara esplicitamente aprendo il suo *Discorso sul metodo*: «Più di tutto mi piacevano le matematiche per la certezza ed evidenza dei loro ragionamenti, ma non ne vedevo ancora l'uso migliore; anzi, considerando che esse non venivano adoperate se non per le arti meccaniche, mi stupivo che su fondamenti così fermi e solidi non si fosse ancora costruito nulla di più alto e più importante» (I, 4).

1. Il primo punto: la "percezione" dei fondamenti

Kurt Gödel – uno tra i più grandi se non il più rilevante tra i logici matematici del XX secolo – che fu tra l'altro, molto amico di Einstein e con lui ebbe molti scambi di idee su temi di fondo, non fu per nulla insensibile alle problematiche di tipo filosofico, pur non essendo un filosofo di professione. Egli si qualificava come "kantiano" dal punto di vista filsoofico: in realtà, un po' come molti matematici, era piuttosto di tendenze platonizzanti. I matematici tendono ad essere sempre un po' platonici, nel senso che sono affascinati dall'idea che gli enti logici di cui si occupano, così idealmente perfetti ed esteticamente eleganti, "esigono" di esistere in un qualche "mondo delle idee"[4]. Si tratta, evidentemente, di un platonismo "addomesticato" da elementi di carattere psicologico e da una certa deformazione professionale… In realtà, almeno a me sembra, che l'orientamento genuino che ha guidato le ricerche di Gödel fosse più vicino ad Aristotele e a Tommaso, che a Platone e, tanto meno, a Kant.

Anche Georg Cantor, intenzionato ad affrontare in maniera sistematica il problema dell'"infinito" in matematica, avrebbe avuto bisogno della teoria dell'analogia aristotelico-tomista, ma quando ne parlò con i filosofi del suo tempo, questi non erano più in grado di cogliere le sue problematiche, tale era la distanza che, ormai, si era venuta a formare tra il mondo delle scienze e quello della filosofia.

I filosofi della scienza, come gli scienziati che riflettono filosoficamente, si interrogano spesso sul valore conoscitivo della matematica, se sia tutta convenzionale o vi sia in essa anche qualcosa di oggettivamente vero, in senso "assoluto" e non puramente "condizionato". Questa è la grande domanda che anche Gödel si è posto, giungendo a conclusioni del tutto controcorrente rispetto al pensiero tipico della filosofia della matematica della sua epoca, che era marcatamente convenzionalista. Siamo, infatti, nel tempo del programma di Hilbert, che accarezzava il progetto di ridurre la matematica alla logica formale e Gödel si è ritrovato veramente ad infrangere completamente questa speranza con i suoi famosi teoremi.

Le problematiche sulla verità nella matematica che Gödel si è posto sono riconducibili, in ultima istanza, al più vasto "problema della conoscenza" che ha impegnato per secoli in particolar modo la filosofia "moderna", e a quello del suo corrispettivo metafisico sul piano della realtà. E il problema della verità è squisitamente filosofico, e non matematico. Le conseguenze sono enormi per la vita dell'uomo e della società, di una intera civiltà. Se non esiste una verità oggettiva, siamo nel relativismo culturale, fino al punto di non poter disporre neppure sul piano giuridico di un diritto naturale a fondamento della legislazione e del diritto internazionale. Queste questioni che potrebbero sembrare riguardare solo gli specialisti portano con sé, in realtà, grandi implicazioni culturali che coinvolgono la vita di tutti.

Così ebbe ad esprimersi Gödel in merito alla questione che lo appassionava: «L'indagine sui fondamenti della matematica negli ultimi decenni ha fornito alcuni risultati che sono a mio giudizio

---

[4] È interessante, a questo proposito, la riflessione "filosofica" di R. Penrose , fisico e matematico,sull'esistenza "reale" dell'insieme di Mandelbrot: «L'insieme di Mandelbrot non è stato certamente un'invenzione di qualche mente umana. L'insieme esiste oggettivamente soltanto nella matematica stessa. Se ha senso assegnare una reale esistenza all'insieme di Mandelbrot, questa esistenza non è nelle nostre menti, perché nessuno può afferrare completamente l'infinita varietà e l'illimitata complicazione di questo insieme. La sua esistenza non può neppure trovarsi nella moltitudine di tabulati sfornati dai computer che cominciano a catturare parte della sua incredibile sofisticazione e della ricchezza di dettagli, poiché questi tabulati possono al più catturare un'ombra di un'approssimazione all'insieme. Esso, tuttavia, ha una forza al di là d'ogni dubbio; la stessa struttura, infatti, si rivela – in tutti i suoi dettagli percepibili, con sempre maggiore finezza quanto più è esaminato da vicino – qualunque sia il matematico o il computer che lo esamina. La sua esistenza può trovarsi solo nel mondo platonico delle forme matematiche» (R. Penrose, *La strada che porta alla realtà,* Rizzoli, Milano 2007, §1.3).

interessanti non solo di per sé, ma anche in considerazione delle conseguenze che hanno sui tradizionali problemi filosofici che concernono la natura della matematica». E ancora: «nella sua forma più semplice incontriamo questo fatto quando si applica il metodo assiomatico non a sistemi ipotetico-deduttivi come la geometria (dove i matematici possono affermare solo la verità condizionale dei teoremi)»[5].

Ricordiamo, per inciso, che "verità condizionali" significa che si tratta di verità *ex suppositione,* come dicevano gli antichi: supposto che si accettino come veri gli assiomi, i postulati, allora condizionatamente si dimostrano come vere le conseguenze. Se gli assiomi vengono cambiati o non accettati possono essere false anche le conseguenze: tutto dipende dal punto di partenza.

Gödel si poneva, in sostanza, questa domanda: gli assiomi sono sempre tutti convenzionali nella matematica o possono – o addirittura devono! – essercene alcuni irrinunciabilmente veri? Al suo tempo tutti i matematici avrebbero risposto che "gli assiomi sono convenzionali", e non c'è verità nella matematica se non "condizionata". Gödel su questo punto andò controcorrente, sostenendo di essere interessato «alla matematica in senso stretto, cioè a quel nucleo di proposizioni matematiche che sono valide in senso assoluto, senza alcuna ipotesi ulteriore»[6]. E dice che «proposizioni così fatte devono esistere, altrimenti non esisterebbero nemmeno i teoremi ipotetici»[7].

Con l'espressione "percezione dei fondamenti" intendo qui indicare questo tipo di interrogativo sul valore conoscitivo delle scienze e quindi in particolare della matematica, in quanto nasce all'interno della matematica stessa. La matematica "vera", secondo Gödel, non è quella convenzionale, ma una teoria che dobbiamo ancora costruire, è una matematica in cui ci "devono" essere almeno alcuni assiomi intesi come verità in senso assoluto.

Queste dichiarazioni furono espresse pubblicamente in una conferenza del 1951. Con il linguaggio di oggi[8] diremmo che Gödel sentiva il bisogno di andare al di là del "relativismo", spingendosi oltre quello lui stesso qualifica come «lo spirito del tempo»[9] cioè il convenzionalismo e proponendo quindi un nuovo programma di ricerca sui fondamenti della matematica che, da questo punto di vista, si distanziava dal programma di Hilbert, di cui aveva dimostrato l'inconsistenza con i suoi celebri teoremi di incompletezza.

«Naturalmente – prosegue – il compito di assiomatizzare questa *matematica in senso stretto* differisce dalla concezione ordinaria della matematica in quanto gli assiomi in un sistema matematico in senso stretto non sono più arbitrari, o almeno non tutti, ma devono essere proposizioni matematiche formalmente corrette, nonché evidenti senza dimostrazione»[10].

La parola "evidenti" è molto compromessa in tutta la filosofia moderna, per cui penso si possa utilmente sostituire con una equivalente, ma più efficace nell'esprimere quanto qui si intende: ed è

---

[5] K. Gödel, "Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche'", in K. Godel, *Opere,* vol. 3, Bollati Boringhieri, Torino 2006, pp. 268-286.

[6] *Ibidem.*

[7] *Ibidem.*

[8] Si tratta di una dizione ("relativismo") diffusasi nel mondo della cultura e nella società degli anni recenti, in modo particolare durante in pontificato di Benedetto XVI grazie ai suoi numerosi interventi su questo tema.

[9] *Ivi,* p. 337.

[10] *Ivi,* pp. 268-269.

"irrinunciabili", nel senso che ci sono assiomi rinunciando o negando i quali si cade in contraddizione, o almeno si finisce per impedire un'ulteriore possibilità di progresso alla matematica stessa, e di conseguenza, alle scienze che di essa si servono.

È sorprendere come queste osservazioni siano collegabili ad altre che risalgono a molti secoli prima. Tommaso d'Aquino, infatti, parla di "primi principi comuni", soprattutto quando commenta Aristotele, e lo fa sia in riferimento alle "nozioni" ("semplici apprensioni"), che in riferimento agli "enunciati", come sono gli assiomi, i postulati.

– Riguardo alle "nozioni", ad esempio, egli spiega come la verità dei principi comuni emerga dalla chiarezza dei "termini" comuni[11] e tra questi principi comuni egli considera subito "ente", "non ente", "tutto" e "parti".

Facendo un salto plurisecolare in avanti è interessante notare come Cantor l'ideatore della "teoria degli insiemi", trattando di "insiemi" (collezioni di oggetti) si ritrovo a parlare di "parti" e di "tutto". E così un'antichissima nozione logico-metafisica riaffiora nella scienza dell'800. E riaffiorerà ancora più insistentemente nel '900 in quella che oggi ci è nota come "teoria della complessità", che, ai nostri giorni, caratterizziamo sommariamente con l'espressione divulgativa che rifiuta il riduzionismo: "il tutto non è riconducibile alla somma delle parti"[12].

Cosi come Tommaso parla di "ente", "tutto" e "parti" come di nozioni primitive che sono comprensibili da tutti (non perché siano innate, ma perché sono indispensabili), similmente dopo Cantor, la matematica moderna, trattando degli insiemi ha sviluppato una sua teoria del "tutto" e delle "parti" con le loro mutue relazioni in quella disciplina che va sotto il nome di "topologia".

Cercheremo, allora, di mostrare come alcuni aspetti dell'impianto aristotelico tomista riaffiorino all'interno del pensiero matematico: è una grande novità perché quello che gli uomini di scienza non hanno mai tollerato è una sorta intrusione, un po' estrinseca, del filosofo nel loro campo. La grande novità dalla fine dell'800 in avanti (anche se al grande pubblico tutto questo deve ancora arrivare) è consistita nella comparsa di problemi di ordine filosofico che sono nati all'interno del pensiero scientifico, perché si creavano paradossi e contraddizioni e quindi non si trattava più di sovrapporre una riflessione filosofica dall'esterno, ma si trattava di superare le contraddizioni interne, così che taluni problemi "filosofici" incominciavano a manifestarsi piuttosto come "scientifici".

2. Risultati in ambito matematico

Entriamo ora nel secondo punto della nostra esposizione. Finora ci siamo limitati a considerare una semplice "percezione" dei fondamenti: ora è necessario compiere un passo in più passando dalla semplice percezione ai risultati effettivamente offerti dalla matematica (teoremi,

[11] Tommaso parte sempre dal linguaggio e fa vedere come le parole che usi dentro hanno una serie di informazioni.

[12] Si veda ad esempio questo passo: «Ogni scienza affronta il problema dei principi comuni delle cose; ed è necessario che lo faccia, perché la verità dei principi comuni emerge con chiarezza dalla conoscenza dei termini comuni, come ente e non ente, tutto e parti, ecc. […] La stessa filosofia prima non li dimostra direttamente in quanto sono indimostrabili.[…] Anche se non si possono dimostrare direttamente, tuttavia il filosofo primo offre una sorta di dimostrazione nel senso che, per poterli contraddire, coloro che li vogliono rifiutare, devono ammetterne la validità, pur non accettandoli per evidenza». (*In Post. Anal.,* L. I, lc. 20, n. 5).

teorie, ecc.)[13]. Possiamo evidenziare, a questo proposito, *due linee di percorso* nella storia della matematica, che hanno condotto a risultati inaspettati in ordine al problema dei fondamenti. Si tratta di due linee di percorso che non sono parallele, ma sono in una certa misura intrecciate tra loro. Vediamo di districarle.

1. Una prima linea di percorso è di carattere "epistemologico": essa riguarda il *rapporto tra matematica e realtà,* tra conoscenza matematica ed esperienza.

Potremmo dire che la matematica non è nata come sistema logico astratto, non è nata platonicamente in un mondo di idee innate: la matematica è nata dall'esperienza. La teoria cognitiva aristotelica dice che si parte dai sensi e poi, per astrazione[14], si costruisce una modellizzazione matematica. Se il percorso di costruzione della matematica, dall'antichità fino agli inizi del '900, è consistito in un partire dall'esperienza e, per astrazione, giungere fino alla formulazione logica e formalizzata della matematica – passaggio dal mondo "reale" al mondo "mentale", fino a giungere allo svincolamento totale della matematica dall'esperienza – ecco che da Gödel in poi incomincia ad aprirsi la possibilità, o necessità, che la matematica stessa si riavvicini all'esperienza e quindi ritorni a contatto con la realtà sensibile. E questo è interessante perché va molto d'accordo con la visione aristotelico-tomista secondo la quale la logica non può mai perdere totalmente un riferimento anche alla realtà e alla metafisica.

2. La seconda linea di percorso delle matematiche e delle scienze matematizzate, riguarda, invece, l'ampliamento dell'"oggetto" della matematica, del *subjectum,* perché quello che noi oggi chiamiamo "oggetto", in realtà, nell'impianto sillogistico della dimostrazione è il "soggetto" della conclusione. Per comprendere come la matematica, e con essa la scienza, si sono ampliate non solo "estensivamente", ma anche "intensivamente", cioè hanno cambiato in qualche modo natura, possiamo ricorrere all'esempio della teoria degli insiemi. Siamo spesso ancora abituati a pensare alla matematica, da una parte come "teoria dei numeri" e dall'altra come "geometria". In realtà con Cantor avviene un effettivo "cambiamento dell'oggetto"[15] della matematica dai "numeri" alle collezioni ("insiemi", "classi") di "enti" di natura qualunque. Si tratta di un effettivo spostamento della matematica verso la metafisica, perché gli insiemi sono degli "enti" più generici dei numeri: gli insiemi sono qualcosa di ben più vasto, tanto che, proprio in quanto "enti", cominciano a manifestare una serie di problematiche tipiche dell'ente in senso metafisico: già il considerare un ente come una collezione ha comportato il ritrovamento di problemi che la metafisica antica aveva già approfondito e che la matematica pre-cantoriana non aveva ancora potuto incontrare. È come se i matematici fossero stati costretti a riflettere sui fondamenti metafisici per poter parlare di collezioni di oggetti e non solo di numeri. Questo ha comportato l'emergere, internamente alla matematica, dalla fine dell'800 a tutt'oggi, di paradossi (logici e semantici), che si manifestano sotto forma di contraddizioni[16]. Queste contraddizioni nascono perché non si ha disposizione una

---

[13] Alcuni di questi aspetti, con la relativa bibliografia, sono stati trattati con maggiore ampiezza, pur se in forma didattica, anche nel cap. 2 del mio studio *Introduzione alla filosofia delle scienze,* Edizioni Studio Domenicano, Bologna 1992.

[14] Ho cercato di riproporre la dottrina aristotelico-tomista dell'astrazione cognitiva in termini confrontabili con le teorie cognitive dei nostri giorni ad esempio nel mio *Le scienze a la pienezza della razionalità,* Cantagalli, Siena 2033, pp. 62-72 e nella voce "Materia", in G. Tanzella-Nitti e A. Strumia, *Dizionario interdisciplinare…,* cit., vol. 1, §VIII, pp. 863-865.

[15] Questa stessa constatazione del cambiamento di oggetto della matematica era già stata evidenziata da tempo, ad esempio, in G. Binotti, "Cantor", in *Dizionario interdisciplinare…,* cit., vol. 2, §IV, p. 1637 («La rivoluzione cantoriana non trasforma soltanto alcuni settori della matematica, ma cambia il suo stesso oggetto»).

[16] I principali tra questi paradossi si trovano elencati e didatticamente illustrati nella *Prefazione* del manuale di logica di E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica,* Bollati Boringhieri, Torino 1972.

teoria dell'analogia, e soprattutto dell'*analogia entis*: si cade in contraddizione se si concepiscono gli insiemi come fossero dei "generi universali" definibili in modo univoco. Così come ente non è definibile univocamente, perché l'ente può essere "sostanza", "accidente", etc. (quindi si dice in molti modi, è "analogo"), così anche le collezioni si dànno in più modi, a differenza dei numeri della matematica tradizionale. Il passaggio dai numeri agli insiemi ha portato alla scoperta di diversi problemi metafisici e logici, e dobbiamo riconsiderare Aristotele e Tommaso piuttosto che Cartesio e Kant, che questi problemi avevano eliminati in nome di un univocismo matematico che oggi si dimostra insufficiente. Riaffiora così l'analogia.

IL PRIMO PERCORSO: DALL'ESPERIENZA ALLA LOGICA FORMALIZZATA

Come è nata in sostanza la matematica fin dall'antichità? Si è partiti dal mondo reale, dal mondo dei sensi, dell'esperienza, per giungere mediante l'astrazione alla formulazione logica. Aristotele e Tommaso, in proposito, parlavano di tre operazioni dell'intelletto: la semplice apprensione (*simplex apprehensio*) – che attua il processo di "astrazione" dall'esperienza sensibile alla nozione universale immateriale che risiede nella mente –, il giudizio (*iudicium*) e ragionamento (*ratiocinium*).

Ora, le due esperienze che originano la matematica sono:

– quella del "contare": quando si dice "1, 2, 3, 4, …" si compie un'operazione universale che si può applicare a qualunque ogetto venga contato;

– e l'esperienza del "misurare": nell'antichità si presentò, per esempio, in modo molto concreto la necessità di misurare l'estensione di un appezzamento di terreno, come indica lo stesso termine "geometria" (misura della terra).

Gradualmente è maturata la capacità di "astrazione": ci si è accorti dell'esistenza di proprietà "universali" che emergevano sia nel processo del contare che quello del misurare. Due grandi personaggi incominciarono a costruire un sistema logico (mondo mentale) che gradualmente si distaccava dalla primitiva esperienza: da un lato abbiamo Archimede (III a.C.), che scopre il procedimento che gli consente di passare dalle intuizioni che gli sono suggerite dalla manipolazione empirica di oggetti a formulare le prime proprietà geometriche astratte. Dall'altro lato abbiamo Euclide che porta a compimento la sistematizzazione della geometria, e con i suoi postulati riesce a dedurre con regole logiche tutte le proprietà dei triangoli, impostare la questione delle parallele, etc.

In questo modo ha inizio un primo distacco della matematica dall'esperienza che condurrà questa disciplina verso un sistema astratto. Ma siamo solo all'inizio, perché era ancora vero che quella matematica, formulata logicamente, serviva pur sempre per contare oggetti reali, era applicabile alla realtà, e quella geometria era una rappresentazione astratta di corpi materiali, di superfici che esistevano sui corpi anche se, nella mente, venivano idealizzate (non c'erano asperità come su un tavolo fisico). Si incomincia a costruire un primo abbozzo di assiomatizzazione; gli *Elementi* di Euclide rimarranno validi per secoli. Si tratta di un passaggio – quella dall'esperienza sensibile alla logica dimostrativa – che richiede anche creatività per giungere al giusto sillogismo dimostrativo: c'è il problema della *inventio medii,* della scoperta della strada per arrivare alle conclusioni e non è cosa facilissima.

Questo è stato un primo passo di un progressivo distacco della matematica dal mondo fisico-reale. Fino a questo punto la matematica era una teoria astratta che corrispondeva alla realtà, una matematica ancora “fisica”: si contano oggetti fisici, oggetti concreti, si misurano lunghezze dello spazio fisico reale; e si va avanti bene così per quasi duemila anni.

I problemi incominciano ad emergere prepotentemente con la “questione delle parallele” e la nascita delle “geometrie non euclidee”[17]. I postulati di Euclide erano abbastanza evidenti ad eccezione del V, il famoso “postulato della parallela”. Dopo moltissimi tentativi di dedurlo come un teorema dagli altri postulati (famoso è il tentativo di dimostrazione di Gerolamo Saccheri) si è incominciato a sospettare che esso non fosse necessariamente vero. Si incominciano a trovare dei contro-esempi e a tentare di elaborare una geometria che lo negasse (geometria non euclidea), o anche una geometria che facesse a meno di quel postulato (geometria assoluta). Così sono nate le geometrie non euclidee con Lobacevskji, Bolyai, Gauss e Riemann. Essi dimostrarono che è possibile, con la sola logica, elaborare ben tre tipi di geometrie, che non presentano contraddizioni (coerenti), e tuttavia si escludono mutuamente. Si deve prendere atto che, da quel momento, la matematica si è staccata completamente dalla realtà, divenendo convenzionale e che non ha necessariamente un corrispettivo nel mondo fisico. Sono possibili quindi teorie matematiche coerenti, solo mentali, puramente logiche[18].

Si incomincia gradualmente a preparare la strada al “convenzionalismo”, perché gli assiomi risultano essere del tutto convenzionali. E si prepara anche la strada al “logicismo”, perché se la matematica è un qualcosa di puramente logico – staccata dalla realtà – allora si può creare anche una matematica “vuota”, dove i simboli non hanno alcun significato e sono solamente collegati tra loro da regole corrette (“formalismo”). Successivamente, ma non necessariamente, si potrà “interpretare” la teoria, trovando dei “modelli” per il sistema simbolico astratto. Incomincia, di conseguenza, ad emergere il progetto di ridurre la matematica alla logica simbolico-formale. Il progetto di ridurre la matematica alla logica vede impegnati grandi personaggi come Frege con la sua “ideografia”, poi Russell e Whitehead, i quali prenderanno come base la teoria degli insiemi di Cantor, nei loro celebri *Principia Mathemathica*. I matematici, a differenza dei filosofi, si sono finora accontentati di quel tanto di “ontologia” con consente di giungere a dare una fondazione alla “teoria dei numeri”, a partire dalla quale elaborano tutto il resto. È interessante, però, notare come, per elaborare una teoria dei fondamenti della matematica, evitando contraddizioni e ampliandone l’oggetto, occorra avvicinarsi sempre di più a principi metafisici.

Con Hilbert nasce l’ambizioso programma di dimostrare che il distacco della matematica dall’esperienza e la riduzione totale della matematica alla logica sono realizzabili e quindi che la matematica non ha più bisogno dell’esperienza, ma è autosufficiente. A questo scopo si richiedono due risultati:

– il primo è che essa sia “coerente”, cioè è immune da contraddizioni;

– l’altro è che essa sia “completa”, ovvero deve poter essere dimostrato, come condizionatamente vero o falso, qualunque enunciato che sia possibile costruire con i soli simboli del sistema assiomatico, a partire dagli assiomi con le regole che il sistema prevede (“decidibilità”).

---

[17] Una interessante storia della nascita delle geometrie non euclidee è offerta dal classico studio di R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico critica del suo sviluppo,* Zanichelli, Bologna 1906 (reprint 1975).

[18] È comunque interessante notare come un qualche ritorno alla realtà può manifestarsi, magari dopo decenni: abbiamo visto che la fisica si è servita delle geometrie non euclidee per descrivere il mondo fisico, come nel caso della teoria della relatività: e anche in questo caso se uno dei modelli dei tre tipi di geometria risulta corrispondente al mondo reale, gli altri due automaticamente non lo sono.

Questo significa che il sistema deve essere totalmente "chiuso", in quanto tutto ciò che esso riesce a formulare deve essere dimostrato come vero o falso a partire dagli assiomi. Il programma di Hilbert rientra nel completamento del primo percorso (dall'esperienza alla logica)[19].

Gödel dimostrerà l'impossibilità di realizzare il programma di Hilbert, facendo vedere che all'interno del sistema assiomatico di Russell e Whitehead (basato sulla teoria degli insiemi) è possibile costruire, con i soli simboli del sistema logico-matematico, delle proposizioni che non sono dimostrabili a partire dagli assiomi stessi e non lo sono neppure le loro negazioni ("indecidibilità"). È come dire che un linguaggio, per quanto sia formalizzato, può formulare più enunciati veri di quelli che riesce a dimostrare al suo interno. E la verità di questi enunciati può essere stabilità solamente dall'esterno del sistema, cioè con criteri non puramente logici.

Gödel è ricorso al famoso "paradosso del mentitore", ben noto fin dall'antichità nel mondo greco che si può formulare così: *il cretese Epimenide dice che tutti i cretesi sono mentitori*. Oppure ricorrendo all'esempio del *barbiere che rade tutti quelli che non si radono da soli*. Non si riesce a stabilire se questo barbiere si rade da solo o no, né se Epimenide, mentre fa la sua dichiarazione sta mentendo o dice la verità. Se dice la verità allora mente, e se mente dice la verità e in ogni caso si ha una contraddizione. Si possono realizzare dei "corto circuiti logici", per cui di certe proposizioni, non si può decidere se sono vere o false. La genialità di Gödel è consistita nel trovare una tecnica per formulare enunciati di questo tipo con il linguaggio simbolico della matematica. L'idea, qualitativamente parlando è questa (poi va tradotta in simboli matematici)[20]:

– occorre costruire una frase "autoreferenziale" (cioè che parli di sé stessa), cioè una frase in cui il soggetto dell'enunciato coincida con l'enunciato stesso;

– in più occorre introdurre una negazione per ottenere il paradosso di una contraddizione.

Questo risultato è sufficiente per concludere che il sistema assiomatico non è completo.

L'abilità di Gödel è consistita, in particolar modo, nel riuscire a rappresentare un enunciato come *P non è dimostrabile* all'interno del linguaggio matematico, traducendolo in un numero (numero di Gödel), cioè costruendo una tecnica per tradurre un'espressione meta-matematica in una espressione matematica.

Al di là dei tecnicismi i risultati ottenuti sono sostanzialmente i seguenti:

1 - La prima dimostrazione è che in un sistema assiomatico, come i *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead, esistono "enunciati indecidibili", e quindi il progetto di Hilbert di dimostrare che il sistema di Russell e Whitehead è completo viene vanificato.

2 - Il secondo risultato riguarda l'impossibilità di dimostrare la "coerenza", cioè l'assenza di contraddizioni in un sistema assiomatico del tipo di quello di Russell e Whitehead: è chiaro che se esiste una proposizione indecidibile non si è in grado di dimostrare neppure se questa confligge o meno con tutto il sistema, e quindi neppure la coerenza è dimostrabile.

---

[19] Il discorso sugli "insiemi", rientra piuttosto nel secondo percorso (ampliare l'oggetto della matematica, dai numeri a collezioni di oggetti di natura qualunque).

[20] Si trovano in letteratura diverse esposizioni del teorema di Gödel e della tecnica della "numerazione di Gödel", come è stata chiamata dopo di lui. La più classica è quella di E. Nagel e J.R. Newman, *La prova di Gödel,* Bollati Boringhieri 1982.

Un enunciato indecidibile non contraddittorio, tuttavia, può diventare decidibile, a patto di aggiungerlo come un nuovo assioma al sistema da cui si è partire. A quel punto si potrebbe essere tentati di ritenere di aver completato il sistema di partenza, ma non è così. In fatti si è semplicemente creato un nuovo sistema assiomatico più vasto che sottostà anch'esso al teorema di Gödel, e si è solamente spostato il problema. Si può procedere all'infinito.

Eppure Gödel è convinto che un'assiomatica "vera" debba arrivare a degli assiomi di per sé irrinunciabili e non solo convenzionali e, quindi, che il ricorso all'infinito debba essere evitato. Il ricorso all'infinito si evita solo ricorrendo ad un criterio decidibilità "esterno" al sistema: infatti che quella proposizione *P* non sia dimostrabile, dall'esterno del sistema, risulta evidente perché in effetti è vero che non si riesce a dimostrarla, ma non si può deciderlo dall'"interno", perché dall'interno non si dimostra né quella né la sua negazione.

È a questo punto che si affaccia l'idea che possano esistere, all'interno del sistema assiomatico, delle proposizioni che, pur non essendo decidibili con criteri di ordine puramente "logico", possono esserlo sulla base di altri criteri (extra-logici), come ad esempio delle osservazioni "sperimentali" (tutta la fisica matematica, in fondo, è costruita così).

Compare, quindi, la prospettiva di una inversione di marcia rispetto al primo percorso. Questo è stato favorito, in epoca recente, anche dall'utilizzo del *computer,* che è divenuto quasi un laboratorio di matematica, che offre delle indicazioni molto prima che un soggetto umano abbia materialmente il tempo di fare tutti i calcoli. L'idea di una matematica nuovamente sperimentale si è riaffacciata in tempi recenti come nell'antichità, ma per strade completamente diverse.

Si tratta di una prospettiva che Gödel stesso suggerisce: «L'affermazione che le proposizioni di un sistema assiomatico sono vere tutte potrebbe al più essere ricavata con certezza empirica che non con certezza logica sulla base di un numero sufficiente di casi particolari o con altre inferenze induttive»[21]. Altri autori hanno riaperto il discorso dell'esperienza nell'ambito della matematica per esempio Chatin (2008): «A mio giudizio i moderni risultati sull'incompletezza spingono nella direzione di una prospettiva quasi empirica della matematica»[22]. E ancora Claude dice: «Il teorema di incompletezza di Gödel non distrugge l'idea fondamentale del formalismo, ma suggerisce che è necessaria una forma più complicata di sistema formale, rispetto a quella concepita da Hilbert»[23]. Sono intuizioni: si sta ricercando in queste direzioni.

Se vogliamo mettere a confronto questi risultati con il tomismo, siamo condotti a ritenere che l'introduzione dell'"analogia", che vedremo nel secondo percorso, abbia a che fare con un sistema più complesso ed articolato, più ricco che non il sistema puramente univocista della matematica tradizionale.

Questi risultati sono stati generalizzati anche ad altri tipi di linguaggi, hanno aperto nuovi filoni della matematica, sia teorica che applicata (funzioni ricorsive, computabilità, scienze cognitive). Domande come: *l'intelligenza è computabile o no? Si può parlare di intelligenza astrattiva artificiale per un computer?* Pare di no: si riapre la necessità di un'attenzione nei

---

[21] K. Gödel, "Alcuni teoremi basilari…", cit., p. 273.

[22] G.J. Chatin, "L'incompletezza è un problema serio?", in G. Lolli, U. Pagallo (a cura di), *La complessità di Gödel,* Giappichielli Editore, Torino 2008, p. 68.

[23] C.S. Claude, "Incompletezza, complessità, casualità o oltre", in *ibidem*, pp. 8-9.

confronti della teoria cognitiva aristotelica dell'astrazione. Gli ingegneri stessi sono interessati oggi a quella che viene denominata come "ontologia formale"[24].

IL SECONDO PERCORSO: L'AMPLIAMENTO DELL'OGGETTO DELLA MATEMATICA

Ora affrontiamo la seconda linea di percorso, cioè il passaggio dai numeri alle collezioni di oggetti, che vengono chiamate "insiemi" o "classi" (con diverse accezioni di significato per i singoli autori). Come è avvenuto questo passaggio? È avvenuto, in prima istanza, quando Cantor si è posto il problema di ampliare l'oggetto della matematica. Il problema che gli imponeva di ricercare un "ampliamento" dell'oggetto nasceva, in qualche modo, dalla stessa teoria dei numeri e aveva a che fare con l'"infinito". Come trattare l'infinito? In matematica questo è un concetto limite: tutta l'analisi matematica ha sempre trattato l'infinito come concetto limite. Come si può codificare l'infinito in matematica? Ha senso dire che ci sono infiniti più "grandi" di altri? Si possono confrontare gli infiniti tra loro? È chiaro che qui l'infinito è inteso in senso "quantitativo", nel senso numerico, non nel senso di "non-finito" o di "onnipotente"… Ma anche solo partendo dall'infinito quantitativo – l'infinito numerico – si ponevano dei problemi in ordine a come fare a trattarlo. Cantor cercò di farsi aiutare anche dai filosofi, dagli aristotelici, ma non riuscì a farsi comprendere: ormai i linguaggi dei matematici e dei filosofi erano divenuti troppo distanti.

Nasceva l'esigenza di "contare" gli enti che appartengono a collezioni di oggetti che potessero essere anche infinite. E così l'oggetto della matematica doveva essere "ampliato": dai "numeri" alle "collezioni", perché trattare l'infinito, in senso estensionale, si traduceva nell'essere in grado di contare collezioni di infiniti oggetti.

Come riuscire a concepire una collezione di infiniti oggetti? Naturalmente l'infinito "in atto" (infinito attuale) non si può attraversare («*infinitum non est pertransire*»[25]), tuttavia si può concepire una "totalità infinita" come se fosse un *unum*. L'infinito non è concepibile cogliendone i singoli elementi in atto uno per uno, ma lo si può cogliere, in un certo modo, come una totalità, e quindi come un unico ente in atto.

Faccio una piccola parentesi. Bisogna distinguere tra infinito "in potenza" e infinito "in atto": l'infinito in potenza è qualcosa che potenzialmente può essere esteso, o allargato (come quando si pensa ad una retta come ad un segmento che potenzialmente può essere prolungato sempre di più); mentre l'infinito "in atto" è qualcosa che è veramente infinito, perché è *già* esteso, o allargato. È una collezione in cui ci sono infinite "cose". I punti di un segmento, ad esempio, sono infiniti. Cantor si pose il problema di come "contarli" in qualche modo. Per rispondere a questa domanda nasce la "teoria degli insiemi": bisogna immaginarsi delle collezioni di oggetti potenzialmente anche infinite. Non le posso pensare in atto considerando tutti i singoli enti che appartengono alla collezione, però posso pensare l'infinito come se fosse un un'unica entità, un *unum,* così come posso pensare ad una retta come un "tutto", pur senza riuscire ad attraversare tutti i singoli punti che la compongono. Occorreva poi elaborare un'altra operazione: non bastava considerare le collezioni

---

[24] Su questi temi si può vedere, ad esempio, G. Basti, "Rapporto Mente-corpo", in G. Tanzella-Nitti e A. Strumia, *Dizionario interdisciplinare,* cit., vol. 1, pp. 920-938; C. Masolo, A. Oltramari, A. Gangemi, N: Guarino, L. Vieua, "La prospettiva dell'ontologia applicata" (www.filosofia.it/images/download/argomenti/AAVV_Ontologia_applicata.pdf).

[25] *In De caelo,* Lib. 1, lc. 9 n. 7.

di oggetti, ma bisognava formulare una nuova teoria del “contare” gli oggetti, che potesse funzionare anche con delle collezioni che possano essere infinite. Ed elaborare una teoria del contare significa formulare una teoria dei numeri per associare un nuovo simbolo numerico anche agli infiniti. Così nasce la teoria che oggi si chiama la “teoria dei numeri transfiniti”.

L’idea che sta alla base di questa è, in fondo, molto semplice, in quanto si fonda su quella che i matematici chiamano “corrispondenza biunivoca”. Pensiamo a ciò che fa il bambino quando deve contare… stabilisce, toccando con le mani, una corrispondenza tra gli oggetti che ha davanti a sé ed altri oggetti che sono, per esempio, le dita della mano. Con una cordicella posso legare un oggetto di un insieme ad un oggetto di un altro insieme e, se non avanza nessuno non appaiato, dico che i due insiemi hanno lo stesso numero di oggetti, che sono “equipotenti”. Si chiamano numeri le classi di equivalenza di oggetti che si possono mettere in corrispondenza in questo modo. È rilevante il fatto che questo procedimento si può applicare anche se gli insiemi sono infiniti, purché si disponga di una formula che consente di non contarne gli elementi, attualmente, uno per uno per uno. Una formula (regola) permette, partendo da un simbolo che definisce un elemento generico di un insieme, di collegarlo con l’elemento dell’altro insieme, solo con quello e viceversa. Per esempio: se ho l’insieme dei numeri naturali {1, 2, 3 , 4, …} e, dall’altra parte, ho l’insieme dei quadrati dei numeri naturali {1 , 4, 9, …}, con una formuletta come $y = x^2$, posso stabilire una corrispondenza biunivoca e dire che i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi, anche se sono infiniti.

Ora il discorso più interessante è quello filosofico che si apre quando si ha a che fare con gli insiemi. Infatti, seguendo questa procedura, Cantor incappò subito in alcuni inattesi “paradossi” che nascevano all’interno della teoria degli insiemi e che sono i paradossi tipici della filosofia dell’ente, già ben noti fino dall’antichità. Questi insorgono in quanto anche le “collezioni sono degli enti”, e sono dotate di un livello di complessità sufficiente per far apparire quei paradossi. Mentre i numeri sono definibili univocamente, le collezioni, invece, non sono tutte definibili univocamente, e questo è il punto[26]. Ad esempio, consideriamo l’ormai classico paradosso scoperto da Russell: posso immaginare un *insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi*? Più “visivamente”: posso compilare un catalogo nel cui elenco compaiano solo cataloghi che non citano sé stessi nel loro l’elenco? Un simile *catalogo dei cataloghi che non citano sé stessi,* di per sé, se non si cita dovrebbe citarsi perché deve comprendere tutti quelli che non si citano; ma nel momento in cui si citasse non sarebbe più un catalogo di quelli che non si citano perché si citerebbe. Ricadiamo nel solito paradosso del mentitore. E quindi l’idea di un insieme degli insiemi che non appartengono a sé stessi ha lo stesso difetto di questi cataloghi: è qualcosa che porta in sé una contraddizione, un paradosso. Cantor si era già accorto di un altro paradosso che non permette neppure definire l’*insieme di tutti gli insiemi,* quello che viene chiamato anche l’*insieme universale*. L’insieme universale, se contiene tutti gli insiemi coerentemente con la sua definizione, deve contenere anche se stesso; “in più” (!) deve contenere anche altri insiemi come, ad esempio tutti i suoi sottoinsiemi. Ma allora non è più “universale”, perché quell’universale che “sta dentro” viene ad essere meno esteso di quello che lo contiene come elemento, oltre ad altri insiemi[27]!

In un primo tempo Russell pensò di scartare in blocco tutti gli insiemi di questo “tipo”. Tuttavia ai matematici la classe universale sarebbe stata molto utile a non vi avrebbero rinunciato nella pratica. Ci si viene a trovare in una situazione simile alla questione che sorse intorno al

---

[26] Ed è per questo che qui utilizzo il termine “collezione” in luogo di “insieme” perché a quest’ultimo dovrà poi essere riservato un valore ben preciso e univoco, mentre il termine “collezione” si rivela essere “analogo”. Spesso si usa anche il termine “classe” come sinonimo di “collezione”, ma qui ho preferito quest’ultimo per ragioni didattiche in quanto “collezione” esprime più intuitivamente l’idea di aggregato di oggetti di quanto lo renda “classe”.

[27] Come, ad esempio i suoi sottoinsiemi.

principio del terzo escluso: gli intuizionisti non volevano accettare, in matematica, il principio del terzo escluso, e rifiutavano, di conseguenza, il metodo della dimostrazione per assurdo. A partire da questo rifiuto, però, per riuscire ad ottenere gli stessi risultati ottenuti dalle altre scuole di matematici, si esigeva la messa a punto di dimostrazioni che rendevano troppo complicata la matematica stessa per essere accettabili, almeno nella pratica. E forse avrebbero anche impedito di raggiungere almeno alcuni nuovi risultati. Parlando, in precedenza, di "irrinunciabilità" di alcuni principi intendevo fare riferimento anche a questo aspetto: se si escludono alcuni principi si cade in contraddizione, oppure non si riesce, praticamente, a far progredire quella stessa scienza in nome della quale tali principi si vorrebbero escludere. Per questo li abbiamo qualificati come "irrinunciabili".

3. Dal problema dei fondamenti della matematica ai principi della metafisica

Vediamo, allora, di trarre alcune conseguenze più propriamente filosofiche. Lo scienziato (e non solo il matematico) scopre che dentro la scienza si nascondono degli elementi di una filosofia che è molto più vicina a quella di Aristotele e Tommaso, piuttosto che a quella di Cartesio e Kant. È un quadro che mette insieme diversi aspetti problematici:

– il primo percorso di cui abbiamo parlato, che va dall'esperienza alla logica, dopo i teoremi di incompletezza, ha evidenziato la necessità di riaffacciarsi nuovamente all'esperienza, facendo uscire dall'univocità nel modo di intendere i sistemi assiomatici, verso un'analogia delle forme di conoscenza e, corrispondentemente, di realtà;

– il secondo percorso, quello dell'ampliamento dell'oggetto della matematica, se viene confinato in una definizione univoca degli insiemi, porta a dei paradossi come quelli dell'insieme universale e di quello di Russell.

Lo scienziato, per la sua natura di ricercatore, non è rinunciatario! Non accetta volentieri che la scienza si debba bloccare di fronte ai paradossi: quando si trova in difficoltà cerca di rivedere tutti i presupposti della sua teoria per "ampliarla". Questo è un atteggiamento costruttivo, perché riapre anche alcune domande filosofiche di non secondaria importanza per il filosofo, attraverso un percorso antico e nuovo.

A questo punto si possono porre due domande che mi sembrano interessanti, in ordine a questo quadro di paradossi, di ricorsi all'infinito, di incompletezze che sono emerse dall'"interno" del sistema scientifico e matematico (non sono state imposte dall'esterno, perché sono i teoremi stessi che pongono gli interrogativi!).

1 - La prima domanda potremmo formularla così, aiutandoci, per semplicità, con il linguaggio comune: l'insieme di Russell (R) e l'insieme universale (U), portando a paradossi e contraddizioni, non si possono accettare entro una teoria degli insiemi, perché non sono insiemi. Sono qualche cosa che non è catalogabile come "insieme", finché mi limito alla nozione univoca (usuale) di insieme[28]. Allora, è lecito domandarsi, se non sono insiemi, non esistono in senso assoluto o possono essere qualcos'altro, ovvero "collezioni" che si attuano *in un altro modo* rispetto a quello degli "insiemi"? Questa prima domanda i matematici se la sono posta e hanno dato una risposta orientata alla seconda possibilità.

[28] Si noti che, in matematica, in un sistema formale, si fa coincidere l'esistenza con la non-contraddittorietà: ciò che genera contraddizione non esiste.

2 – Possiamo, poi, porre anche un'altra domanda, che ancora essi non si sono posta in maniera chiara, pur essendo molto simile alla prima nella sua formulazione. Ed è questa: se un sistema assiomatico come quello di Russell e Whitehead è incompleto – e lo ha dimostrato Gödel perché al suo interno ci sono proposizioni indecidibili – è inevitabile il ricorso all'infinito? È impossibile arrivare ad un "primo sistema" in cui tutti i sistemi assiomatici sono decidibili, oppure un "primo" può esserci, ma è qualcosa di diverso da un sistema assiomatico nel senso che diamo a questa nozione logica? In qualche maniera essi hanno intuito che la risposta può essere nella linea di questa seconda opzione, quando hanno prospettato l'idea che con la sola logica non tutto è decidibile, ed occorre ricorrere a qualcos'altro come, ad esempio, l'esperienza. In questo caso il ruolo di questo "primo sistema" che ha un modo di esistenza diverso da quello logico-assiomatico, sarebbe il "mondo reale" nel quale la decidibiltà è resa possibile sotto forma di "controllo sperimentale".

UNIVOCITÀ E ANALOGIA

Quello che ha caratterizzato il cammino della scienza matematizzata è l'"univocità delle definizioni": se c'è infatti qualcosa che ha reso forte la matematica è proprio l'univocità cioè il fatto che, all'interno di tutto il sistema, una volta che si sia definito qualcosa, si deve mantenere quella definizione, altrimenti, se si cambia il significato dei termini in corso d'opera, si genera equivocità ed errore. La sintesi aristotelico-tomista, tuttavia, ci insegna che ci può essere qualcosa che si distingue sia dall'"univocità" che dall'"equivocità", ed è l'"analogia". È una *aequivocatio a consilio*: l'analogia, è in fondo questo, una sorta "equivocità controllata", in qualche misura. E l'analogia è necessaria quando si ha a che fare con i "trascendentali"[29] come la nozione di "ente". È qui che viene ad "impigliarsi" la definizione di classe universale della teoria degli insiemi.

Sulla base di questo suggerimento che proviene dalla sintesi aristotelico-tomista, di fronte alle due domande precedenti, siamo indotti a riformularle così per dare loro una risposta:

– *R* ed *U* non sono collezioni come gli "insiemi", o sono collezioni (classi) *in un altro modo*? Ovvero la nozione di collezione/classe può avere più "tipi", più modi di attuarsi? Questa situazione è simile a quella che si incontra quando si ha a che fare proprio con la nozione di "ente": ente si predica/attua in più modi? È un paragone legittimo anche se può apparire fantasioso; però indagare in questa direzione è importante e interessante.

– Se il sistema assiomatico di tipo matematico alla Russell e Whitehead è incompleto, è inevitabile il ricorso all'infinito (con conseguente relativismo)? O può esistere un "primo" che è "sistema assiomatico" (qui occorrerebbe un'altra dizione più espressiva come forse quella di "mondo") *in un altro modo*: c'è un altro modo di "esistere" che va al di là del modo (mentale/logico) di un sistema assiomatico? Sono domande legittime.

Ma alla prima questione, in fondo, sia Russell che Godel rispondono affermativamente: si può dire che sono "collezioni", o "classi"[30] *in un altro modo,* ovvero esistono diversi "tipi" (da cui la "teoria dei tipi" di Russell) o modi di attuare la nozione di insieme. Gödel ha fatto una cosa molto più semplice perché ha distinto solo due grandi "tipi" di classi, cioè quelle "proprie" e "improprie" (o insiemi nel senso usuale del termine).

---

[29] Qui il termine "trascendentale" non è da intendersi in senso kantiano, ovviamente, ma nel senso della Scolastica.

[30] Non si usa più la parola "insieme" quando si parla di insieme universale, così come non si usa la parola "genere" quando si parla dell'ente.

Alla seconda domanda la risposta non è altrettanto chiara, ma sembra essere ancora affermativa: sì esiste qualche cosa che è "sistema assiomatico" (o "mondo") in altro modo, è il "mondo" reale, la realtà extramentale; esiste un altro modo di essere "mondo" che non è solo quello logico. A Gödel sarebbe, forse, piaciuto dire che è un mondo delle idee di tipo platonico… Non vedo perché non si possa dire che è la realtà extramentale, senza bisogno di postulare un ulteriore mondo in più (*entia non sunt multiplicanda sine necessitate,* come suggerisce il rasoio di Ockham).

È interessante rilevare come alcune riflessioni di questo tipo sono state fatte, almeno accennate, anche da matematici e logici. Ad esempio:

«I paradossi dell'autoriferimento sono noti da millenni, i teoremi di Gödel – ma anche quelli di Russell e Cantor – ci costringono di vederne il loro lato positivo mostrandoci che la contraddizione nasce solo se ci si appiattisce solo ad un unico livello di astrazione»[31], (cioè in definizioni univoche).

Gödel distingue tra "classi proprie" e "insiemi" (o classi improprie), dà una prima definizione: *ogni classe che appartiene ad un'altra classe è una classe impropria o insieme*[32]. Ma se io mi limito a questa non riesco a trattare la classe universale, e nemmeno di quella di Russell, incappo nei paradossi. Allora io devo poter ammettere, se non voglio escludere la classe universale e rimuovere le contraddizione, anche un secondo modo di essere classe che è tipico di quelle *classi che non appartengono a una classe più ampia,* e le chiamo "classe proprie". Una classe propria è un qualche cosa che non può essere elemento di una classe più grande: non si può andare oltre i confini di essa, così come non si può pensare di andare oltre i confini di quell'universo fisico che è il cosmo nella sua totalità.

Allora, se noi ammettiamo questa nozione di classe propria, la classe universale si deve pensare come classe propria, evitando così il paradosso di qualche cosa di più grande che la possa contenere: d'altra parte se è universale non può essercene una più grande. Occorrono due definizioni diverse per distinguere il modo di esistere di una classe, e quindi c'è una "non univocità" della nozione di classe. Notiamo che non si tratta di due definizioni "equivoche" (disparate), perché hanno in comune qualcosa di reale e quindi sono "analoghe": hanno in comune il fatto di definire entrambe una collezione di oggetti, e cioè entrambe hanno in comune la nozione di "appartenenza"; c'è una relazione di appartenenza che le caratterizza entrambe, distinguendo però il fatto che l'una può appartenere ad una più vasta, invece l'altra può avere solo altre collezioni che appartengono ad essa.

Joseph Bocheński, profondo conoscitore della logica simbolica e della filosofia aristotelico-tomista fa notare proprio come l'impossibilità rilevata da Aristotele di parlare dell'ente come un "genere" si ricolleghi proprio al problema della classe universale[33].

Tommaso d'Aquino commentando Aristotele, dice: «in questo gli antichi filosofi cadevano in errore perché utilizzavano la nozione di ente come se corrispondesse ad un'unica definizione, come se fosse la natura di un unico genere» (un matematico che non si apra alla filosofia qui non capisce,

---

[31] G. Sambin, "Incompletezza costruttiva", in G. Lolli, U. Pagallo (a cura di), La complessità di Gödel, cit., p. 125-142.

[32] La formulazione presentata da Gödel per la teoria degli insiemi si può trovare nel suo articolo "La coerenza dell'assioma della scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo con gli assiomi della teoria degli insiemi'", in K. Gödel, *Opere,* vol. 1, Bollati Boringhieri, Torino 2002, pp. 36-106.

[33] Cfr., J.M. Bochenski, *La logica formale,* Einaudi, Milano 1972, vol. I, p. 77.

perché quando si parla di "natura" non segue più…) «ma questo è impossibile, infatti ente non è un genere, ma si dice di realtà diverse secondo accezioni diversificate»[34] e questo ha a che fare con la scoperta che anche classe e insieme si deve dire secondo accezioni diversificate, perché altrimenti incorri nella contraddizione; c'è un altro passo della Summa che è ancora più chiaro, dove dice che «il filosofo – Aristotele – dimostra nel *III libro della Metafisica* che ente non può essere in genere di qualcosa perché ogni genere comporta delle differenze che sono al di fuori dell'essenza (cioè della definizione del genere stesso), mentre non si dà nessuna differenza al di fuori dell'ente perché il non ente non può costituire una differenza in quanto non esiste»[35].

È utile esemplificare. Quando dico "uomo" o "cane" o "tavolo", ecc., posso introdurre una "differenza" negando: dicendo "non cane" intercetto tutto ciò che non è cane, ed esistono molti enti che non sono "cane". Quindi la differenza mi permette di identificare realtà che non sono "cane", ma che pure esistono. Mentre se io dico "non ente", dal momento che "ente" è onnicomprensivo, al di fuori dell'ente non c'è nulla, e quindi è come se avessi una classe universale totalizzante al di fuori della quale non può essere contenuto nessun elemento, perché "ente" comprende tutto. Questo ha molto a che fare con la classe universale, anche se la nozione di classe universale è puramente estensionale (è una collezione di oggetti), mentre la nozione di "ente" non è puramente estensionale, ma risponde ogni volta a "definizioni" e "forme" differenziate. È una nozione molto più ricca; mentre la matematica è, per ora, molto più limitata. Tuttavia, da qualche tempo, si sta tentando di elaborare una "ontologia formale", per formalizzare anche queste nozioni della metafisica classica.

* * *

In conclusione, si può dire che l'analogia dell'ente è stata intravista da Gödel quando ha scoperto la necessità di distinguere tra classi proprie ed improprie e da Russell con la "teoria dei tipi". Peraltro, Bochenski fa notare che Russell e Whitehead parlano di «equivocità sistematica» quando si riferiscono all'analogia, e rileva che si tratta di una appropriata traduzione moderna proprio della dizione latina di *aequivocatio a consilio,* come dire "equivocità controllata"[36]. A questo punto questi autori dicono che tali problematiche sono propriamente filosofiche e che loro, come logici matematici, non si addentrano in queste tematiche. È chiaro che questo quadro apre più domande delle risposte che è in grado di offrire, tuttavia mostra come il vecchio mondo chiuso della scienza non può essere più tale. E le sue aperture verso la metafisica non sono estrinseche, ma nascono è dall'interno delle teorie scientifiche e per superare contraddizioni e paradossi, occorre introdurre nozioni più ricche, in vista della possibilità di elaborare anche un'ontologia formale.

---

[34] *In Meph.,* L. I, lc. ix, n. 6.

[35] *Summa Theol., I,* q. 3, a. 5.

[36] «Incidentalmente va sottolineato che gli autori dei *Principia Mathematica* hanno fatto uso della traduzione esatta di *aequivocatio a consilio* quando hanno coniato l'espressione "ambiguità sistematica". Infatti essi stavano trattando dell'analogia» (J. Bochenski, "Sulla analogia", in G. Basti e A. Testi, *Analogia e autoreferenza,* Marietti 1820, Genova-Milano 2004, p. 141.