Alcuni esempi di frattali e caos

Alberto Strumia
Dipartimento di Matematica - Università di Bologna
Centro Interdipartimentale di Ricerca e Applicazione della Matematica
Via Saragozza 8 - 40123 Bologna

Introduzione

La ricerca scientifica nell'ambito matematico e fisico-matematico ha visto, in questi ultimi vent'anni, uno sviluppo notevole della teoria dei frattali, divenuta, grazie all'impiego del calcolatore elettronico, un vero e proprio laboratorio di indagine quasi sperimentale. Forse dall'epoca di Archimede i matematici non si erano più dedicati a curare il rapporto tra esperienza e costruzione teorica in una maniera tanto diretta e attenta. Nel contempo lo studio dei sistemi dinamici governati da equazioni differenziali non lineari ha messo in evidenza fenomeni di instabilità delle soluzioni in relazione alla sensibilità ai dati iniziali e l'ingenerarsi di comportamenti caotici, che si sono rivelati essere presenti anche nella dinamica con cui vengono generati i frattali.

Il personal computer ha ormai introdotto anche in casa nostra, come di non pochi studenti, la possibilità di studiare questi comportamenti visualizzandoli mediante semplicissimi programmi iterativi di poche linee, la cui scrittura non richiede particolari conoscenze di programmazione elettronica. L'impiego di un video a colori consente poi la realizzazione di immagini di grande suggestività e la tecnica dell'animazione consente di comprendere visivamente le proprietà fondamentali di queste strutture, come l'autosimilarità e il concetto di dimensione frazionaria.

La possibilità di impiegare un personal computer in combinazione con una lavagna luminosa a colori, a lezione, suggerisce un semplice ampliamento della didattica tradizionale ad argomenti dei quali, ormai, gli studenti sentono parlare di frequente e dei quali è possibile offrire loro una cognizione precisa che li orienti ad una comprensione dei limiti e degli sviluppi che lo strumento matematico sta manifestando.

Mi limito qui a descrivere alcune semplici esperienze di approccio ai frattali e alla dinamica non lineare che ho avuto occasione di fare, indicando sia i tipi di oggetti di cui si tratta sia i tipi di programmi che ho realizzato e utilizzato. L'hardware impiegato è stato un Macintosh IIsi con 5 Megabyte di RAM e coprocessore matematico dotato di monitor RGB a 256 colori.

I - Tipi di frattali

Ciò che inizialmente ha attirato la mia attenzione sono stati i frattali generati mediante funzioni ricorsive nel piano complesso e in particolare gli insiemi di Juila e di Mandelbrot, generati da funzioni quadratiche, che costituiscono esempi ormai classici, insieme al metodo di Newton.

Un'altra categoria di frattali è quella dei frattali generati mediante trasformazioni lineari quali sono le trasformazioni affini, sia nel piano che nello spazio: questi sono di particolare interesse in quanto consentono di riprodurre forme e profili di oggetti esistenti nella realtà come profili di montagne, contorni di nubi, figure di foglie, alberi, foreste, e qualsiasi sagoma anche irregoalare, purchè si scomponga la figura in un numero sufficiente di regioni che devono risultare come attrattori frattali generati da altrettante trasformazioni affini.

Durante la loro generazione al computer i frattali manifestano una dinamica caotica, in quanto i punti vengono a distribuirsi nella figura seguendo un procedimento imprevedibile, il cui risultato complessivo è però ordinato e realizza una figura ben precisa (attrattore).

II - Tipi di programmi

Per quanto rigurada i tipi di programmi utilizzati e i linguaggi di programmazione, ho realizzato:

• *Programmi interattivi:* si tratta di programmi in cui i frattali vengono visualizzati mentre vengono generati, impiegando come linguaggio il *Quick Basic* della Microsoft nella versione 1.0 per Macintosh. I programmi sono stati compilati per renderne più veoloce l'esecuzione. Alcune immagini si realizzano in tempi brevi, dell'ordine di qualche minuto, in modo da consentire di seguire la dinamica caotica della generazione dell'immagine in tempo reale. Generalmente si tratta di frattali generati da trasformazioni affini. Questo tipo di programmi ha anche il vantaggio di poter essere realizzato in forma interattiva, consentendo all'utente di vedere come cambia il risultato dell'esecuzione al variare dei parametri di input.

• *Programmi audiovisivi:* altre immagini, come quelle degli insiemi di Mandelbrot e Julia nel piano complesso, richiedono tempi più lunghi, in un ordine di grandezza che va dalla decina di minuti a qualche ora. Il tempo macchina diviene più lungo in dipendenza del numero di iterazioni necessario per ottenere il dettaglio voluto quando si effettua un ingrandimento di un particolare dell'insieme e quando sia necessario l'impiego di variabili reali in doppia precisione. Si può ovviare ai tempi lunghi di elaborazione, ai fini della didattica, presentando le immagini già complete sotto forma di audiovisivo commentato attraverso la descrizione delle proprietà matematiche dell'oggetto in questione e dai listati dei programmi utilizzati per generare le immagini.

Ho realizzato questi programmi audiovisivi utilizzando la funzione *Animation* di *Mathematica* della Wolfram Research Inc. Le immagini generate a 8 colori con *Quick Basic* possono essere salvate, in maniera semplice su disco, disponendo della funzione *Command-Shift-3* del System 7 e successivamente trasferite mediante *cut-paste* dal file *Teach Text* ad un file di *Mathematica* in formato *Picture.* Questo metodo ha consentito anche la realizzazione di animazioni nel piano delle fasi per visualizzare effetti di biforcazione della stabilità dell'equilibrio nei sistemi meccanici, ecc.

• Altri audiovisivi con immagini e animazioni a 256 colori sono stati realizzati con *NCSA Data Scope 1.1* e *NCSA Image* (gentilmente fornito dal CINECA).

Che cosa sono i Frattali

Non siamo ancora in possesso di una definizione completa e del tutto generale di questi oggetti matematici. Dal punto di vista analitico-geometrico essi vengono, almeno in linea provvisoria caratterizzati come:

— sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico completo $H(X, d)$

— che considerati come elementi di un insieme, o punti di uno spazio, costituiscono a loro volta ad uno spazio metrico completo $\mathcal{H}(H, h)$

— per i quali si può definire una dimensione che può essere frazionaria (dimensione frattale, dimensione di Hausdorff-Besicovitch)

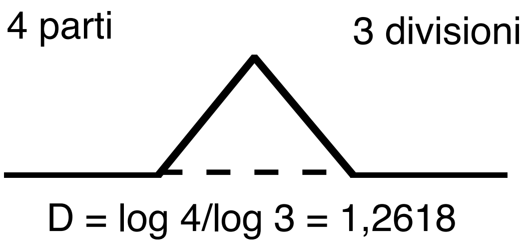
— possono essere generati mediante un processo iterativo facendo uso di funzioni ricorsive (per una formulazione rigorosa del concetto di funzione ricorsiva si può vedere, ad esempio, E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino, 1972).

— sono autosimilari: o in senso proprio, in quanto ingrandimenti successivi consentono di ritrovare strutture identiche a se stesse a scale diverse, o nel senso che non è possibile identificare a quale scala di ingrandimento ci si trova in quanto l'insieme frattale presenta gli stessi caratteri a tutte le scale (autosimilarità statistica).

Per farsi un'idea di come nasce il concetto di dimensone frazionaria "si può dividere un parallelepipedo di dimensione D in N sottoparallelepipedi, dividendo ciascuno spigolo in K parti uguali. Quindi sarà $N = K^D$. Il rapporto di omotetia fra il tutto e una sua parte è $r = 1/K$. Si ha quindi:

$$D = \log N / \log(1/r)$$

Per esempio per la curva poligonale di von Koch è $r = 1/3$ e per costruirla si sostituisce a ciascun segmento un sistema di $N = 4$ segmenti. Si ha dunque $D = \log 4/\log 3 = 1,2618$, valore intermedio fra uno e due!" (B.B. Mandelbrot, *La geometria della natura. Sulla teoria dei frattali*, ed. Theoria, Roma-Napoli, 1989, p.73).



Per maggiori dettagli si può consultare l'interessante libro di M. Barnsely, *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988; un altro testo molto utile, soprattutto per gli algoritmi al calcolatore, oltre che per le immagini a colori che riproduce è quello di H.O. Peitgen, D. Saupe, *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag, New York, 1988)

• **Frattali nel piano complesso: insiemi di Julia e di Mandelbrot**

Consideriamo la legge ricorsiva:

$$z_{n+1} = (z_n^2 + c)$$

con z variabile del piano complesso e c parametro complesso. L'n-esimo termine rappresenta la somma parziale della serie:

$$z_0 + (z_0^2 + c) + \left[(z_0^2 + c)^2 + c\right] + \left\{\left[(z_0^2 + c)^2 + c\right]^2 + c\right\} + \cdots$$

— Un insieme di Julia si ottiene, fissando il valore di c, come insieme dei punti iniziali z_0 per i quali la serie non diverge;

— L'insieme di Mandelbrot si ottiene, fissando $z_0 = 0$, come insieme dei parametri c per i quali la serie non diverge.

Il computer consente di costruire un immagine approssiamta all'ordine voluto, mediante un troncamento della serie all'ordine prescelto. Un algoritmo che viene generalmente utilizzato è detto *escape time method* o metodo del tempo di fuga.

Ecco i listati di due brevi programmi in *Quick Basic* con cui si possono ottenere gli insiemi di Julia e di Mandelbrot a 8 colori.

```
'—————————- Julia set ——————————
BackColor 30 '—— sfondo bianco ——
ForeColor 33 '—— scrivi in nero ——-
CLS
R=10: Mx%=400: My%=400
INPUT "numits = (50) ", numits%
R%=10
INPUT "a = (-1.7), b = (-1.7), c= (1.7), d = (1.7) ",a, b, c, d
INPUT "x = (.745) , y = (.113) ",x0,y0
BackColor 30
CLS
FOR p% = 1 TO Mx%
FOR q% = 1 TO My%'——— doppio ciclo ———
k=a+(c-a)*p%/Mx%: L=b+(d-b)*q%/My%
x =k: y=L
FOR n%=1 TO numits%
xx = x^2 - y^2 - x0
yy = 2 * x * y - y0
x=xx: y=yy
IF x^2 + y^2 > R% THEN
ForeColor (2*n%+1)*33 '——— secgli il colore ———
PSET(p%+80,q%+10),33:n%=numits%
```

```
END IF
IF INKEY$ <>" " THEN GOTO esc ' ——- break utente ——-
NEXT n%,q%,p%
esc:
END

'——————— Mandelbrot set ——————
BackColor 30
ForeColor 33
CLS
R%=10: Mx%=400: My%=400
INPUT "numits = (20) ",numits%
R%=10
INPUT "a = (-1.8), b = (-2), c= (2.2), d = (2) ",a, b, c, d
INPUT "x = (0) , y = (0) ",x0,y0
BackColor 30
CLS
FOR p% = 1 TO Mx%
FOR q% = 1 TO My%
K=a+(c-a)*p/Mx%: L=b+(d-b)*q/My%
x =x0: y=y0
FOR n%=1 TO numits%
```

$xx = x^2 - y^2 - K$

$yy = 2 * x * y - L$

```
x=xx: y=yy
IF x^2 + y^2 > R% THEN
ForeColor (2*n%+1)*33
PSET(p%+80,q%+10),33:n%=numits%
END IF
IF INKEY$ <>" " THEN GOTO esc
NEXT n%, q%, p%
esc:
END
```

•Frattali generati mediante trasformazioni affini

(IFS: Iterated Function Systems)

Per ottenere questo tipo di frattali si applica una regola di iterazione basata su una o più trasformazioni lineari (trasformazioni affini) e si disegna un punto dopo una o più iterazioni:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

La figura tende a stabilizzarsi attorno ad un attrattore che dipende dalla scelta dei coefficienti della trasformazione (codici).

Per produrre figure prestabilite ci si serve del *collage theorem* che permette si stabilire leggi di contrazione che generano dei punti all'interno di poligoni assegnati che schematizzano la figura voluta. Esso consente di dichiarare che se la trasformazione affine è una contrazione e le condizioni iniziali sono assegnate entro un certo perimetro allora tutti i punti successivi, genrati dall'iterazione, non escono dal perimetro assegnato.

Si possono generare in questo modo: felci, profili di montagne, profili di nubi, alberi e foreste frattali, ecc.

Ecco il listato di un programma che genera una felce tridimensionale.

```
'———————————— fern ————————————-
BackColor 30 '——— sfondo bianco ————
CLS
DIM a(4),b(4),c(4),d(4),e(4),f(4)
a(1)=0:a(2)=.85:a(3)=.2:a(4)=-.15 '——— codici IFS ——-
b(1)=0:b(2)=.04:b(3)=-.26:b(4)=.28
c(1)=0:c(2)=-.04:c(3)=.23:c(4)=.26
d(1)=.16:d(2)=.85:d(3)=.22:d(4)=.24
e(1)=0:e(2)=0:e(3)=0:e(4)=0
f(1)=0:f(2)=1.6:f(3)=1.6:f(4)=.44
x=0: y=0: numits% = 30000
ForeColor 353 '———— disegna in verde ———
FOR n%=1 TO numits%
'———— algoritmo casuale ———
K = INT(4*RND-.00001)+1
xx=a(K)*x+b(K)*y+e(K)
yy=c(K)*x+d(K)*y+f(K)
x=xx: y=yy
IF n% > 10 THEN PSET(40+50*y,220-50*x)
IF INKEY$ <>" " THEN esc
NEXT n%
esc:
END
```

• **Dinamica caotica nei frattali**

La dinamica secondo la quale viene generato un frattale si può studiare mediante il corrispondente *web diagram* (diagramma a ragnatela), che consente di costruire graficamente la sequenza dei punti mediante l'iterazione della funzione che genera il frattale.

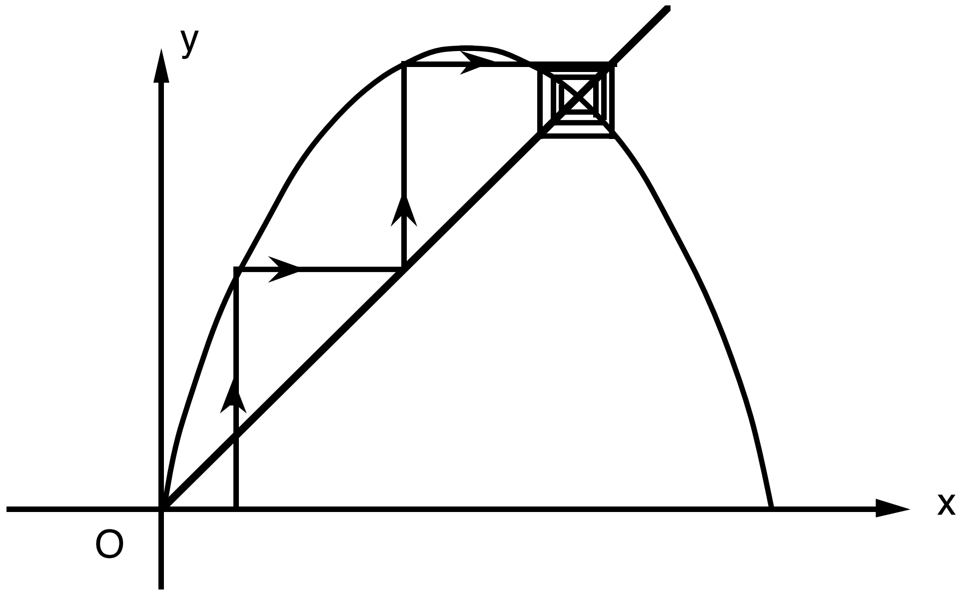


Fig. 1: *Web diagram* per la funzione $y = \lambda\, x(1-x)$

La non linearità della trasformazione è responsabile della presenza di attrattori e della formazione di un comportamento caotico nella generazione dei punti.

Tuttavia si può realizzare una dinamica caotica anche in presenza di trasformazioni lineari quando esse sono più di una e si assegna una regola deterministica o casuale in base alla quale l'iterazione procede passando da una trasformazione all'altra. Gli esempi riportati mostrano la dinamica caotica per un sistema algebrico. Lo stesso tipo di comportamento si può ottenere anche quando :il sistema è differenziale, anzichè algebrico, come viene esemplificato nel diagramma di fase che rappresenta l'attrattore caotico di Duffing generato dal sistema differenziale non autonomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = (1-x^2)\,x - \alpha\,y + \beta\,cos\,\omega\,t \end{cases}$$

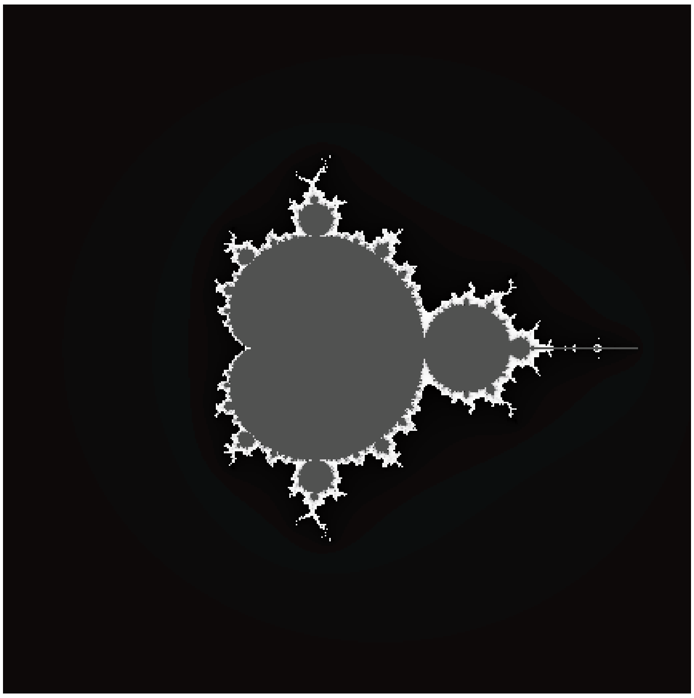


Fig. 3: L'insieme di Mandelbrot

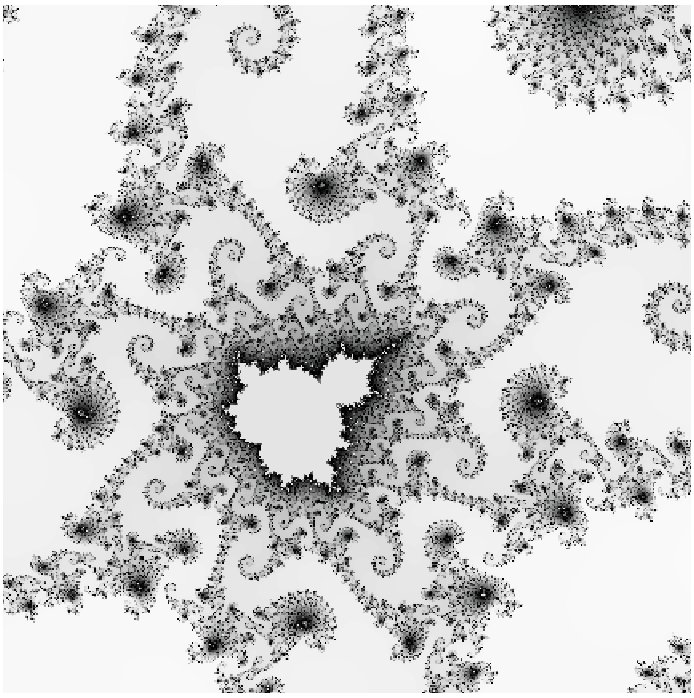


Fig. 4: Uno zoom nell'insieme di Mandelbrot ne mostra la struttura autosimiliare

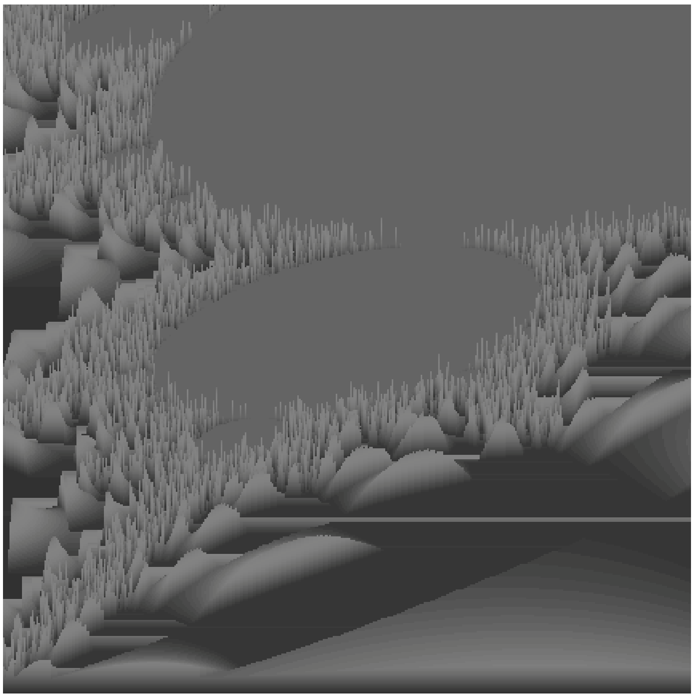


Fig. 5: Una panoramica tridimensionale dell'insieme di Mandelbrot

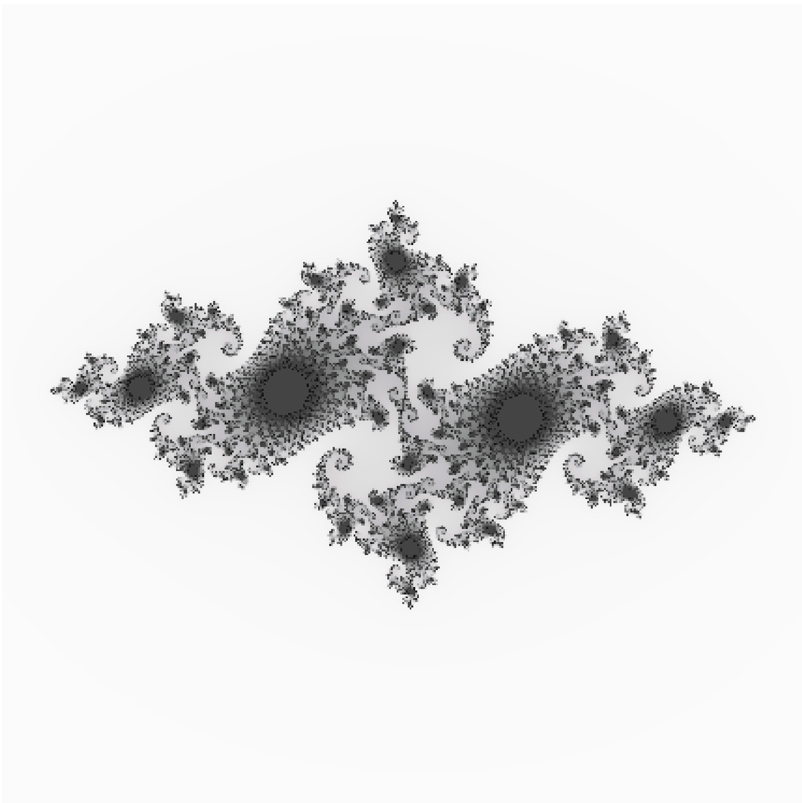


Fig. 6: L'insieme di Julia per $c = 0.745429 + 0.113008i$

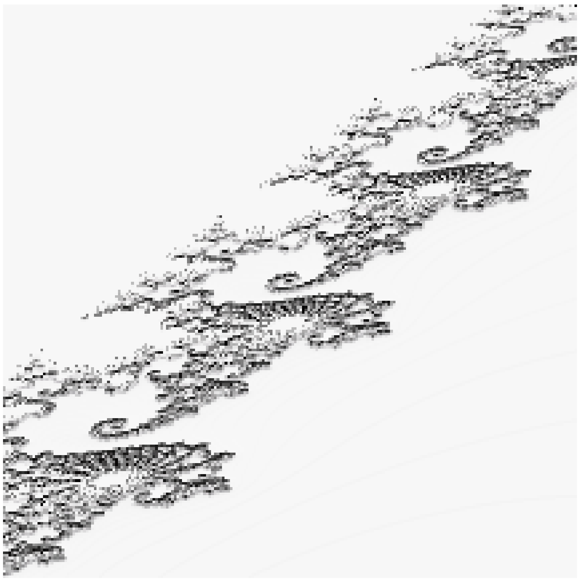


Fig. 7: La valle dei cavallucci marini nell'insieme di Mandelbrot

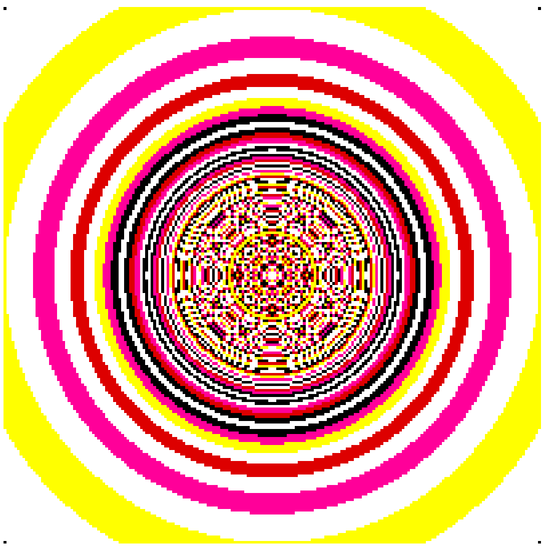


Fig. 8: Elementi decorativi generati dalla funzione $sen\, 1/r$

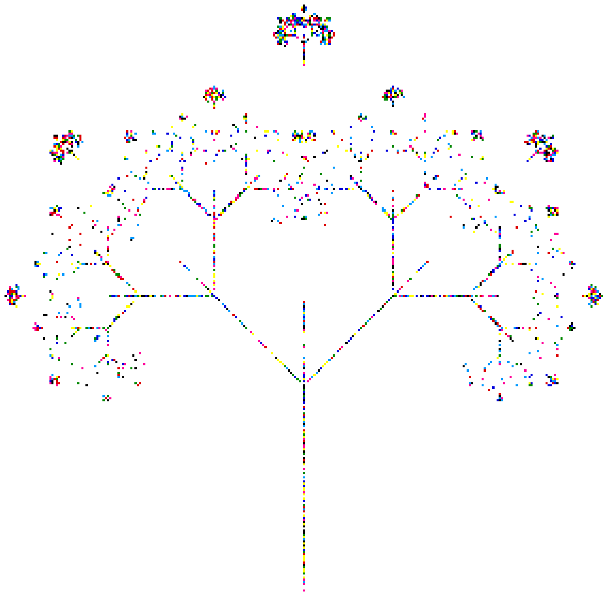


Fig. 9: L'albero frattale

Fig. 10: Una felce tridimensionale generata da 4 trasformazioni affini

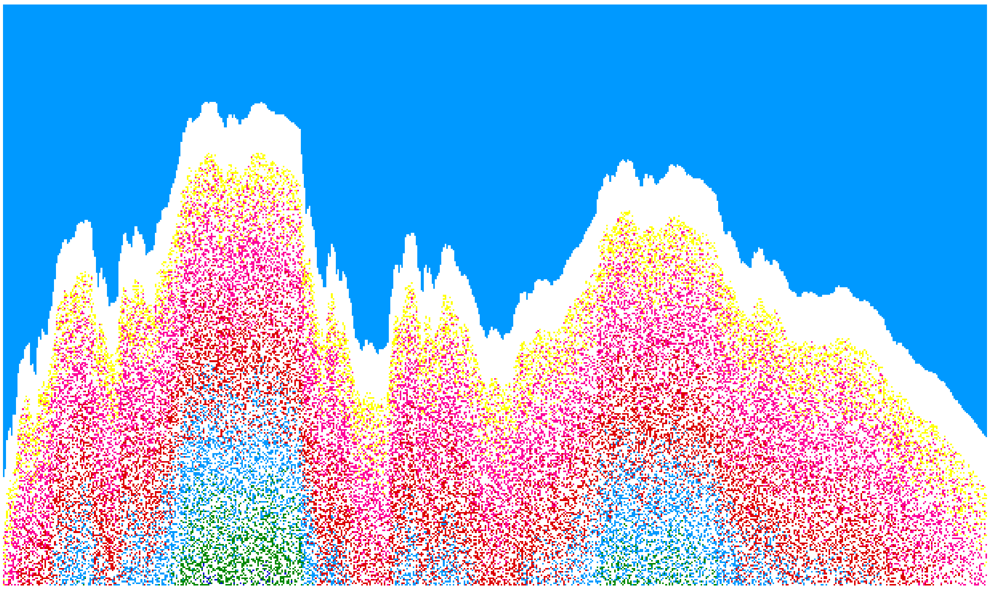


Fig. 11: Profili di montagne